DOS CURIOSAS APLICACIONES DE LA SEMEJANZA E IGUALDAD DE TRIANGULOS: LA DUPLICACION DEL CUBO Y LA TRISECCION DEL ANGULO.

LUIS M. CASAS GARCIA (+) (&)
LUIS MARQUEZ ZURITA ( ) (&)
LORENZO BLANCO NIETO (*) (&)

RESUMEN

Se trata de dos posibles aplicaciones "curiosas" de la semejanza e igualdad de triángulos: la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Se plantea el tema desde dos puntos de vista: En primer lugar, tratamos de llamar la atención sobre la importancia del trabajo manipulativo en matemáticas, utilizando herramientas que no son las clásicas regla y compás. Tras una breve reflexión histórica, se ofrecen soluciones manipulativas, mediante instrumentos que pueden ser fácilmente construidos por los alumnos.

En segundo lugar, tratamos de llamar la atención sobre unos problemas de geometría que, en los últimos años, han sido un tanto relegados al olvido. No sólo tienen interés para los alumnos, sino que pueden ser muy sugerentes para los profesores aunque sólo sea a título de curiosidad histórica.

SUMMARY

TWO CURIOUS APPLICATIONS OF THE SIMILARITY AND EQUALITY OF TRIANGLES: DUPLICATION OF THE CUBE AND TRISECTION OF THE ANGLE

This article treats two possible curious applications of similarity and equiality of

(&) Grupo BETA
(+) Colegio Público "Juventud" (Badajoz)
( ) Colegio Público "Leopoldo Pastor Sito" (Badajoz)
(*) Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la UNEX.

triangles: duplication of the cube and trisection of the angle.

The topic is approached from two points of view. In the first place we aim to draw attention to the importance of manipulative work in mathematics, using instruments other than the classic ruler and compass. After a brief historical reflection, manipulative solutions are suggested, by means of instruments which can easily be constructed by the pupils.

Secondly we draw attention to some geometrical problems which in recent years have been somewhat relegated to oblivion. They are not only interesting for the pupils but can also be thought provoking for the teacher even if only from the point of view of historic curiosity.

INTRODUCCION

La enseñanza de la Geometría ha venido siendo relegada en los últimos años a un lugar casi olvidado en la práctica educativa dentro del aula de Matemáticas, mientras que han cobrado mayor importancia cuestiones tales como el cálculo numérico o el álgebra.

Los temas de Geometría, casi siempre al final de los manuales escolares en la E.G.B., sólo se tratan como de pasada y de una manera un tanto superficial.

No se suele llegar mucho más allá de ciertas cuestiones de semejanza, la mayoría de las veces alejadas de los intereses del alumno y del cálculo de áreas y volúmenes, normalmente reducido al aprendizaje de las fórmulas.

La Historia, por contra, nos muestra el enorme interés que, desde su comienzo tuvo la Geometría y su enseñanza en el desarrollo de las Matemáticas. Hace más de 2.000 años, los griegos destacaron ante todo en esta materia, donde alcanzaron logros importantes y comparativamente difíciles de superar, mientras que, sin embargo, su aritmética no alcanzó grandes alturas. ¿Dónde ha ido su vieja y noble Geometría? ¿Qué se hizo de la máxima "Nadie entre aquí que no sepa Geometría"?.

Con su "marginación", se están perdiendo valores dignos de ser tenidos en cuenta: su enorme riqueza en conceptos que están dentro de nuestras estructuras mentales más profundas: ejes de referencia en el espacio, noción de semejanza,... y sus posibilidades en la enseñanza, pues son la parte de las

Matemáticas donde más temprana y fácilmente se puede introducir al alumno en el camino de la representacijón gráfica y de la demostración.

¿Cuáles pueden haber sido las causas? Quizá, entre otras, hace algunos años un excesivo tratamiento algebraico, y un abuso de las estructuras conjuntistas, que llevaron a estudiar la Geometría alejada de la manipulación de figuras reales, en el plano o en el espacio.

Si no queremos perder la cantidad ingente de recursos formativos que nos ofrece, hagamos Geometría con nuestros alumnos, pero de modo que les sea atractiva, y asentando conocimientos de forma sólida, siguiendo el camino que nos muestra la Historia: la experimentación y la construcción de un edificio cada vez más solido y complejo.

Podríamos tomar en cuenta las siguientes consideraciones que estimamos importantes para su enseñanza:

1) Las Matemáticas, y en particular la Geometría, han de tener un sentido lúdico, y no sólo en las edades de la Educación General Básica. El juego es un privilegio del que podemos gozar, y las Matemáticas son para las personas que disfrutamos con ellas, en el fondo, un juego.

Las Matemáticas tienen entre nosotros una estimación social grande, porque son eminentemente prácticas, pero ¿no sólo eso?. ¿Qué eran para los griegos sus figuras, sus demostraciones, sus teoremas geométricos? Un juego del espíritu, de la inteligencia. Los romanos, más prácticos, fueron grandes ingenieros, grandes constructores, pero las Matemáticas no avanzaron con ellos como con sus maestros.

2) La formalización de la Geometría griega, que llevó a cabo Euclides no fue sino el final del proceso, nunca el principio. Se consiguió después de siglos de descubrimientos, pero también de ensayos y errores.

Hagamos que nuestros alumnos disfruten con la Geometría, no les privemos del placer de descubrir, no les demos ya todos los resultados acabados, dejémosles que investiguen, que descubran, que "jueguen".

3) La adquisición de los conceptos geométricos y matemáticos en general, es un proceso constructivo. Los conceptos han de irse elaborando con pasos pequeños, pero firmes, y la mejor forma de hacerlo es que sea del propio alumno el que vaya construyendo su propio conocimiento. Nuestra labor debe dirigirse a ayudar al alumno en ese proceso, no a darles resultados ya hechos.

Es necesaria la manipulación, la medición, la representación de figuras: medirlas, palparlas, recortarlas, construir cuerpos geométricos... A medida que vaya creciendo su conocimiento, necesitará cada vez menos de los apoyos materiales, pero en una primera fase no debe prescindir de ellos. Sólo de esta manera se alcanza un aprendizaje eficaz.

En esta línea, la utilización de materiales varios es, *más que una alternativa*, una necesidad: a los clásicos regla y compás no dudemos en añadir todos los materiales que puedan ser utilizados como recurso, y de la misma manera que pretendemos que los alumnos construyan su pensamiento, hagamos que construyan sus herramientas, los aparatos que necesitan.

La línea metodológica en que ha trabajado el grupo Beta de Didáctica de las Matemáticas, reflejada en sus publicaciones, camina en la línea que venimos apuntando en los párrafos anteriores, y este artículo, a la vez que una propuesta de trabajo, quieren ser una pequeña reflexión que nos sirva a la hora de nuestro diario trabajo con los alumnos.

Los problemas que presentamos, probablemente no tengan gran aplicación práctica, en el sentido que le damos a esta expresión en la vida diaria, pero abordan, al igual que otros autores, dos cuestiones clásicas en la historia de las Matemáticas, y pueden ser un excelente pretexto para un trabajo interesante con nuestros alumnos.

LA DUPLICACION DEL CUBO Y LA TRISECCION DEL ANGULO

Hay dos problemas clásicos en Geometría que a lo largo de los siglos han llamado la atención no sólo de eminentes matemáticos, sino también de otras personas, que sin grandes conocimientos, se han lanzado a resolverlos, dada su aparente sencillez. Este es, en principio, su mayor atractivo: tan sólo se necesita una regla y un compás.

El primer problema, de la duplicación del cubo, planteado de forma sencilla, consiste en hallar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de otro dado, utilizando, como antes hemos dicho, únicamente la regla y el compás.

Históricamente, el problema se conoce con el nombre del "problema de Delos", ya que se cuenta que el oráculo de Delos mandó a los atenienses que duplicarán el altar cúbico del templo. Cuando, diligentemente, se dispusieron a hacerlo, duplicaron todas las medidas, no consiguiendo con ello, evidentemente, el propósito deseado.

Por lo que respecta al segundo problema, el de la trisección del ángulo, de todos es conocido que se trata de una construcción geométrica sencilla, estudiada en la E.G.B., la división de un ángulo en dos partes iguales utilizando regla y compás. Pero, cuando se intenta una construcción semejante para dividir el ángulo en tres partes, resulta imposible.

Estos problemas son efectivamente de resolver con regla y compás. La demostración de esta imposibilidad requiere un aparato matemático avanzado, pero, por el momento, bastará con que lo aceptemos así. Ya hemos tenido en la historia demasiados visionarios duplicadores de cubos y trisectores de ángulos como para que sigamos metidos en ello.

Entonces, ¿es que algo tan sencillo en apariencia no puede hacerse? Pues no... y sí. Unicamente no puede hacerse *exclusivamente* con regla y compás.

LA DUPLICACION DEL CUBO

Este problema, aparte de por otros múltiples aspectos, entre los que cabría destacar el trabajo con números irracionales, es interesante, pues su solución se basa en la semejanza de triángulos rectángulos, constituyendo una curiosa y quizá poco conocida aplicación de ésta.

La duplicación del cubo puede resolverse recurriendo a un aparato, utilizado por los griegos (figura 1-a), y cuya descripción y referencia histórica aparece en el libro de Courant y Robbins (1.979) que mencionamos en la Bibliografía.

Tras exponer el método griego, presentaremos una solución ideada por nosotros y que, por su facilidad, creemos que está más al alcance de los alumnos.

a) El método de los griegos

Consideremos (Figura 1-a) un ángulo recto rígido MZN y una cruz movible en ángulo recto B, XW, PQ. Dos varillas adicionales RS y TU pueden deslizarse perpendicularmente a los lados del ángulo rcto MZN.

En la cruz se eligen dos puntos fijos E y G, de tal forma que GB = a y BE = f tengan longitudes prefijadas. Situando la cruz de modo que los puntos E y

G estén sobre NZ y MZ respectivamente, y deslizando las varillas TU y RS, podemos llevar el aparato entero a una posición en que tengamos el rectángulo ADEZ, por cuyos vértices A,D,E, pasan los brazos BW, BQ, BV de la cruz. Tal disposición es siempre posible si f > a.

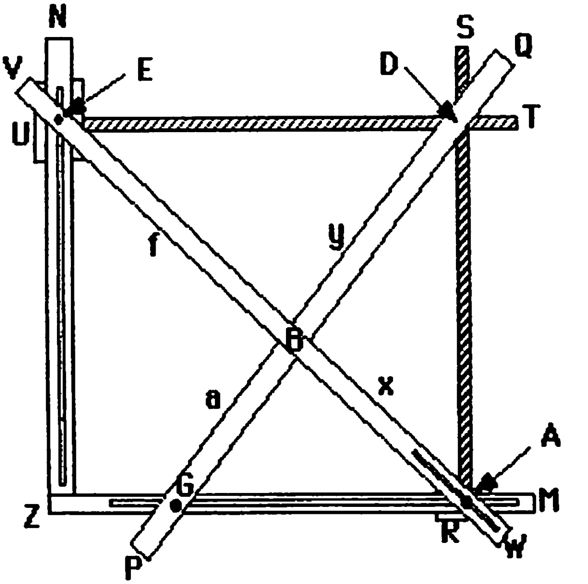

FIGURA 1-a

La esencia del funcionamiento de este aparato consiste en que se han formado tres triángulos semejantes entre sí, que son los determinados por los puntos BGA, BAD y BDE, como pasamos a ver.

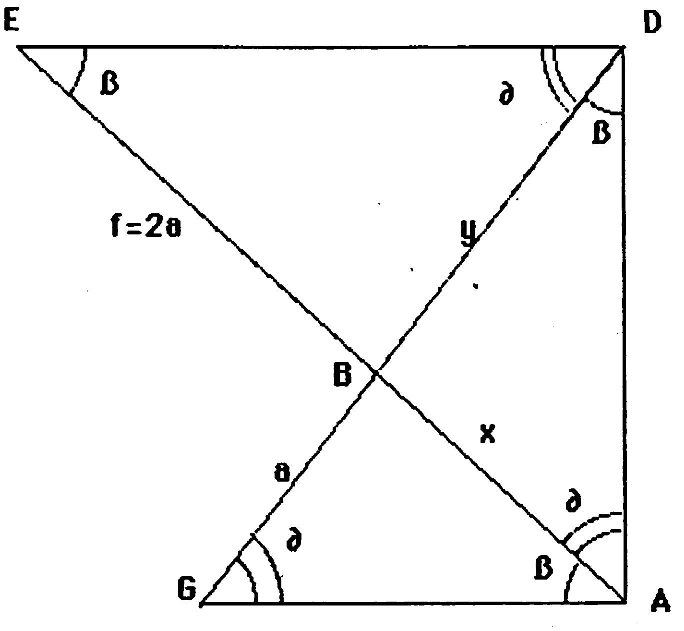

FIGURA 1-b

Todos los ángulos α son iguales por ser correspondientes en los triángulos BGA y BDE, y por tener sus lados perpendiculares al α del tercer triángulo BAD.

Es evidente que con los ángulos β ocurre algo similar, con lo cual queda demostrada la semejanza de los tres triángulos BGA, BAD y BDE.

Así podemos escribir la siguiente proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{f}$$

Sí, además, hacemos que sea f = 2a en el aparato, tendremos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

De $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ obtenemos:

$x^2 = a * y$ y por tanto

(I) $x^3 = a * y * x$

De $\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$ obtenemos:

$2a^2 = y * x$ de donde:

(II) $2a^3 = a * y * x$

Igualando las expresiones (I) y (II) tenemos que:

$$x^3 = 2a^3$$

y por tanto, x es la arista de un cubo cuyo volumen es doble del cubo de arista "a". Tenemos así resuelto el problema de la duplicación del cubo.

b) Un método simple

Si queremos simular en clase este procedimiento, no es preciso utilizar el aparato, sino que podemos recurrir al uso como herramienta de dos simples hojas de papel, recurso que nos parece más al alcance de nuestros alumnos.

Pasamos a descrifbir nuestro método:

Trazamos dos rectas perpendiculares H y V. A partir del punto de intersección O de las dos rectas, y hacia la izquierda, marcamos sobre la recta H la distancia "a", medida de la arista del cubo que queremos duplicar y, hacia arriba, sobre la recta V, la distancia "2a".

Tomando una hoja de acetato o papel algo transparente, que representamos por el rectángulo ABCD, la colocamos de forma que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.º) Que su vértice B quede sobre la línea H, a la derecha de O.

2.º) Que su borde AB corte a la recta V en el punto 2a (Ver figura 2-a).

En estas condiciones, es claro que la hoja ABCD puede moverse siempre que siga cumpliéndolas.

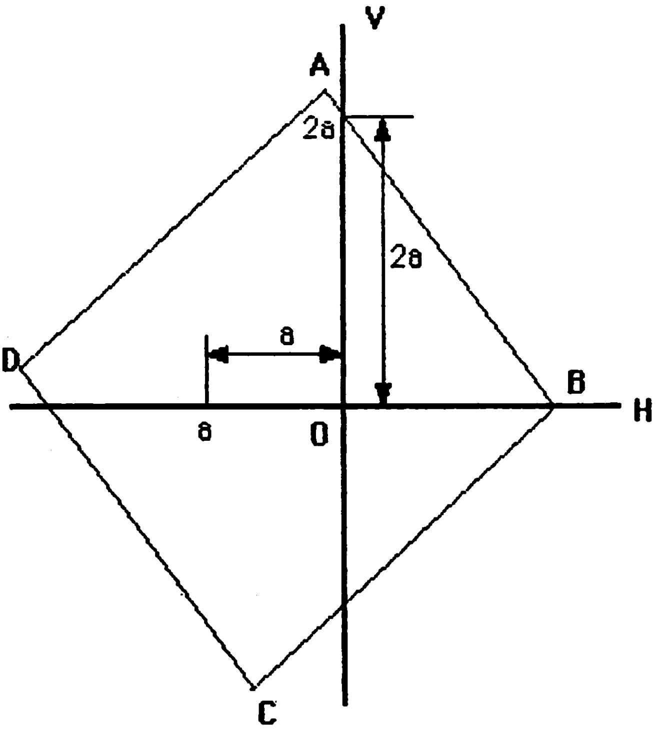

FIGURA 2 - a

Tomamos a continuación una segunda hoja A'B'C'D' y la disponemos de forma que su borde B'C' quede alineado con el BC de la hoja anterior, pudiéndose desplazar a lo largo de él.

Haremos los movimientos necesarios para conseguir que, respetando todas las condiciones anteriores, el vértice B' quede sobre la línea V, por debajo de O, a la vez que el borde A'B' corte a la recta H en el punto "a" (Ver figura 2-b).

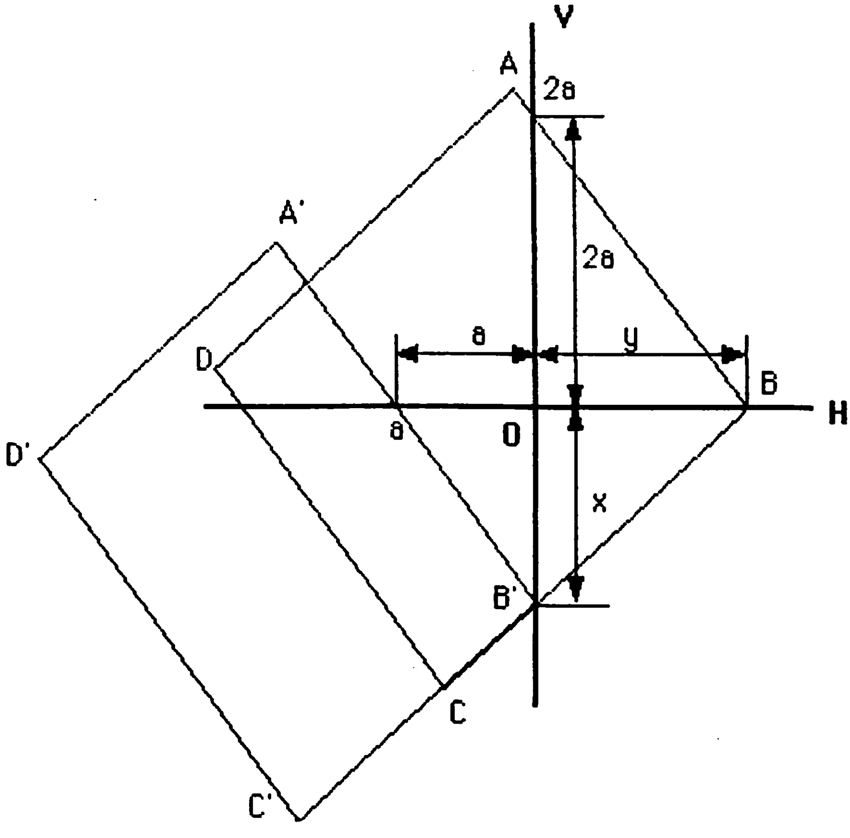

FIGURA 2-b

La posición en que se cumplen todas las condiciones anteriores es *única*, y en ella se han formado tres triángulos semejantes: OaB', OBB' y OB2a.

La demostración de la semejanza de estos triángulos es análoga a la que antes hicimos para el aparato griego, y en ellos se cumplen las mismas proporciones, con lo que, de nuevo, tenemos $x^3 = 2a^3$.

En esta construcción, obtenida mediante nuestras hojas, pueden observarse, además, algunas interesantes conclusiones:

1.º Podemos seguir dibujando triángulos semejantes indefinidamente, con sólo ir trazando paralelas a las hipotenusas de los triángulos. Por ejemplo, desde el punto 2a, trazaríamos una paralela a BB', y a partir del punto de corte de esta paralela con H, trazaríamos otra paralela a A'B'.

Obtendríamos así una figura en espiral en la que, al conservarse la razón de semejanza, el cateto mayor de cada nuevo triángulo sería la arista de un cubo de volumen doble al construido tomando como arista el cateto mayor.

2.º) Si al principio de la construcción, sobre la línea V, tomamos "3a" en lugar de "2a", obtendríamos la triplicación del cubo. De la misma forma, si tomáramos "4a", obtendríamos su cuadruplicación, y así sucesivamente, con lo que podemos observar que se trata de un procedimiento general.

3.º) Si consideramos "a" como segmento unidad, "x" representaría la construcción geométrica de la raíz cúbica de 2, y teniendo en cuanta la conclusión del punto 2.º anterior, podríamos así construir los segmentos raíz cúbica de 3, raíz cúbica de 4, etc.

Resulta interesante, por su sencillez, comprobar la validez de esta construcción tomando como datos de perdida "a" y "8a", con lo que obtendríamos la construcción de un segmento que es la raíz cúbica de 8, es decir, 2.

Para una mayor profundización en este tema, pueden consultarse los libros que mencionamos en la Bibliografía. En particular, resultan muy interesantes algunas otras soluciones de los griegos al problema de la duplicación del cubo, que aparecen mencionadas en el volumen I de la enciclopedia "Sigma, el mundo de las Matemáticas". Estas soluciones nos dan una idea de lo avanzado de su Geometría, y tan sólo indicamos dos de ellas.

1.º) Hallando la intersección de la parábola $y = x^2$ con la hipérbola $y = 2a/x^2$.

2.º) Hallando la intersección en el espacio de tres cuerpos, que eran un cilindro, un cono y el cuerpo de revolución obtenido al girar un círculo alrededor de una de sus tangentes.

LA TRISECCION DEL ANGULO

Posiblemente, si plantearamos el problema de dividir un ángulo en tres partes iguales, la primera intención de muchas personas (adultas y formadas, no sólo alumnos) sería trazar un arco con centro en el vértice del triángulo, para a continuación trazar una cuerda en ese arco y dividir la cuerda en tres partes iguales. Si nos molestamos en hacerlo, comprobaremos que la solución no es válida, pues los ángulos no son iguales.

a) EL "HACHA INDIA"

Para resolver este problema existe otro aparato, llamado "hacha india", muy sencillo, que nos permite hacerlo.

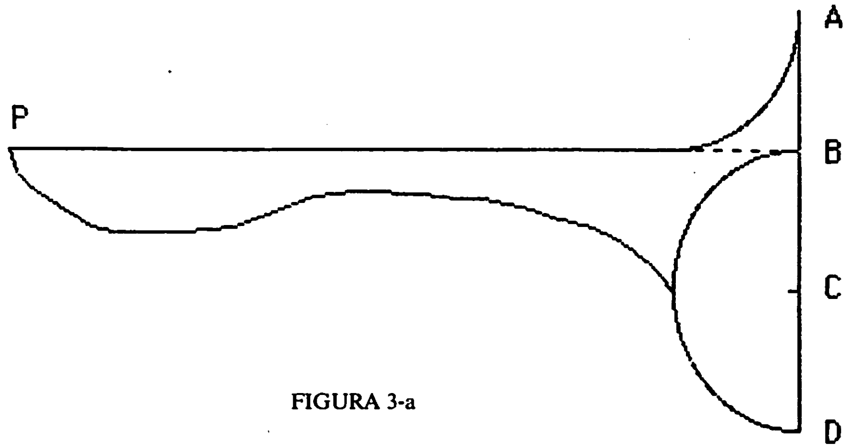

FIGURA 3-a

Consiste en una pieza de cartón o acetato recortada de acuerdo con la figura anterior, siendo PB perpendicular a AD, y AD dividido en tres partes iguales AB = BC = CD. Sobre BD está el semicírculo de centro C y radio CD = BC.

Cuando se da un ángulo, si se coloca este "hacha" encima estando Q sobre la recta PB y el semicírculo BD tangente a una recta del ángulo, entonces los puntos B y C señalan la trisección exacta del ángulo.

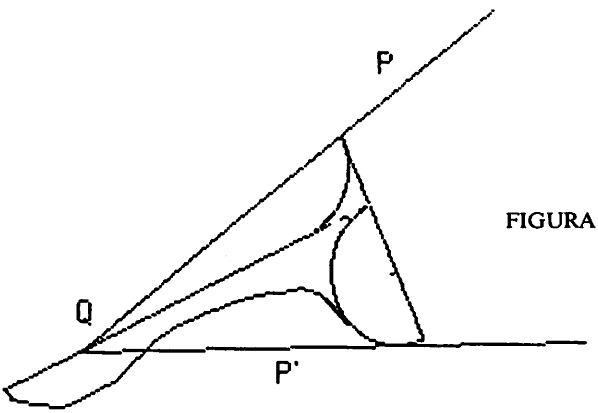

FIGURA 3-b

La justificación de su funcionamiento, consiste en que se forman, según se puede observar en la figura 3 - c, tres ángulos rectángulos iguales, determinados por los puntos QAB, QBC y QCE, donde el punto E es el de tangencia de la semirrecta P' con el arco de centro C y radio CB = CD. Por ser E el punto de tangencia, el segmento CE es perpendicular a la semirrecta P'. Observando el resto de la construcción, se comprueba fácilmente que, en efecto, los tres triángulos son rectángulos e iguales.

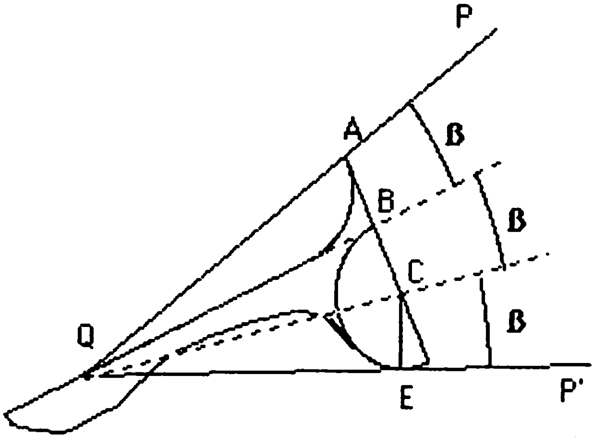

FIGURA 3-c

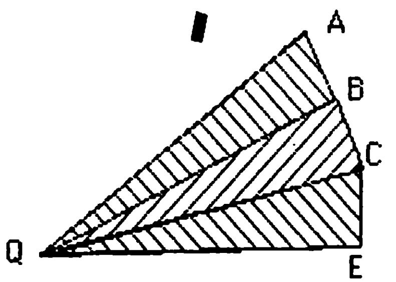

FIGURA 3-d

La justificación del procedimiento se basa en la igualdad de los triángulos QBA, QBC y QCE:

En efecto, el triángulo QBA es igual al QBC:

1.º) Por ser rectángulos en B.

2.º) Por tener al lado QB común.

3.º) Por ser AB = BC por construcción.

Del mismo modo, el triángulo QBC es igual al QCE.

1.º) Por ser rectángulos en B y E, respectivamente.

2.º) Por tener QC común.

3.º) Por ser BC = CE por construcción, al ser radios de la semicircunferencia BCDE.

Si los triángulos rectángulos son iguales, es evidente que el ángulo coincide en los tres, con lo que hemos trisecado el ángulo inicial.

b) EL PROCEDIMIENTO DE ARQUIMEDES

¿Cuántas veces hemos dicho a nuestros alumnos que estos problemas simplemente no pueden resolverse? Pues ya vemos que sí se puede. ¡Claro!, dirá alguno, ¡pero no están hechos con regla y compás!. Pues tengamos cuidado de explicar esto.

Bien, pues vamos a ver que, por lo menos el de la trisección del ángulo, sí puede hacerse exclusivamente con regla y compás.

Ya están apareciendo las sonrisas irónicas... más locos trisectores de ángulos... ¡Alto ahí!, que aquí hay truco... Y el truco está en que, cuando decimos "exclusivamente con regla y compás", nos estamos refiriendo a los usos clásicamente permitidos para la regla y el compás, esto es: la regla sólo puede emplearse para trazar una línea recta entre dos puntos.

Se plantea aquí una cuestión acerca del uso, inadecuado a veces, que hacemos del lenguaje matemático, pues siendo éste un lenguaje que se caracteriza ante todo por su rigor y precisión, hacemos a veces afirmaciones que no son ciertas estrictamente, y que transmitimos así en nuestros alumnos.

Pasemos a analizar la solución de Arquímedes y veamos cómo hemos de cuidar la precisión de nuestro lenguaje.

Si utilizamos la regla y el compás permitiendo únicamente los usos a los que antes hacíamos referencia, el problema, efectivamente, no tiene solución, como ya está demostrado. Pero ¿y si le damos otro uso a la regla? Seguimos usando exclusivamente regla y compás y el problema ahora sí tiene solución. Muy antigua, pues pertenece nada menos que a Arquímedes, y es ésta:

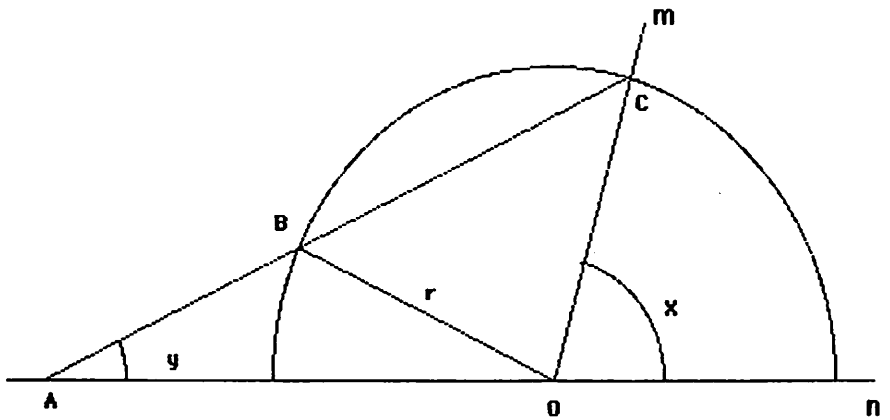

FIGURA 4-a

La construcción consiste en lo siguiente:

Sea "x" un ángulo arbitrario dado, como en la figura, con lados Om y On.

Prolonguemos el lado "On" hacia la izquierda y tracemos un semicírculo con centro en O y radio arbitario. Señalemos dos puntos A y B en el borde de la regla, tales que AB = R. Manteniendo el punto B en la semicircunferencia, deslicemos la regla haciendo que A coincida con la prolongación del lado "On" del ángulo "x", mientras al borde de la regla pasa por la intersección C del lado "Om" del ángulo "x", con la semicircunferencia de centro O. Con la regla en esta disposición, tracemos una recta, que forma un ángulo "y" con la prolongación del lado "On" del ángulo "x".

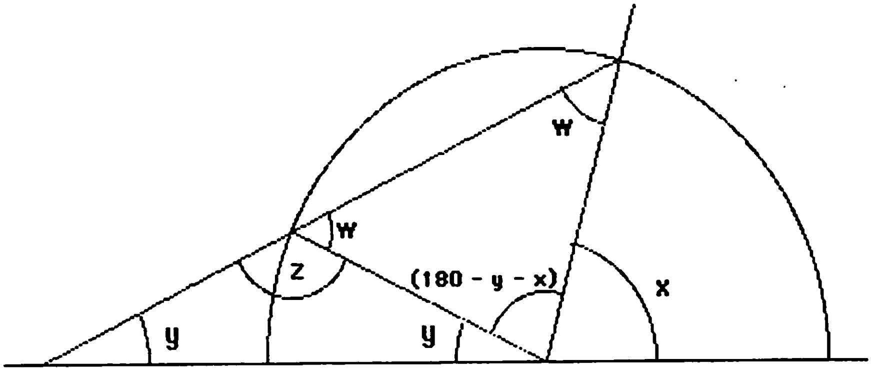

FIGURA 4-b

En esta construcción, podemos observar:

1.º) w + w + (180 - y -x) = 180º

2.º) z + w = 180º

3.º) y + y + z = 180º

De aquí deducimos:

* De 1.º

2w − y − x = 0, de donde

2w = y + x, de donde:

w = (y + x)/2

*De 2.º

Si z + w = 180º, sustituyendo, tenemos que

z + (y + x)/2 = 180º

*De 3.º

Si y + y + z = 180º y también

z + (y + x)/2 = 180º entonces

y + y + z = z + (y + x)/2, y por tanto

y + y = (y + z)/2 de donde

2y + 2y = y + x, de donde se reduce que 3y = x, o lo que es lo mismo, que

$$y = x/3$$

Tanto el hacha indica como el sistema de Arquímedes presentan el inconveniente de que son difíciles de usar para ángulos mayores de 90º, y aún más si son mayores de 180º.

Este inconveniente se puede obviar fácilmente efectuando la trisección, no directamente del ángulo pedido "a" sino de uno auxiliar "b" elegido según convenga, dependiendo del valor de "a", y haciendo las correciones necesarias.

Si tomamos $b = 180 - a$, entonces $b/3 = 60 - a/3$, con lo que $a/3 = 60 - b/3$.

Si tomamos $b = a - 180$, entonces $b/3 = a/3 - 60$, con lo que $a/3 = b/3 + 60$.

Si tomamos $b = 360 - a$, entonces $b/3 = 120 - a/3$, con lo que $a/3 = 120 - b/3$.

Con lo que sólo habrá que sumar o restar ángulos de 60° ó 120°, fáciles de construir con regla y compás.

CONCLUSION

Hemos tratado en este artículo de presentar soluciones a unos problemas clásicos de la Geometría que se prestan a su resolución por procedimientos manipulativos.

No debemos olvidar la importancia que, sobre todo en determinadas edades, y como comentábamos en la introducción del artículo, tiene la manipulación para una correcta contrucción del conocimiento matemático.

Los problemas aquí presentados, consideramos que son interesantes por su dimensión histórica, y creemos que pueden hacernos reflexionar acerca de algunos aspectos de nuestra cotidiana práctica educativa.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA, C. y OTROS. (1987). *Invitación a la didáctica de la Geometría.* Ed. Síntesis. Madrid.

ALSINA, C; BURGUES, C. y FORTUNY, J. (1988) *Materiales para construir la Geometría.* Ed. Síntesis. Madrid.

BARRANTES LOPEZ, M. y REVILLA MARTINEZ, D. (1.988) "Geometría para profesores de E.G.B.: un laboratorio". *Campo Abierto,* n.° 5. Revista de la E.U. Magisterio de Badajoz.

BETA, GRUPO (1.985) *Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida* I.C.E. Universidad de Extremadura. Badajoz.

BETA, GRUPO (1.990) *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza.* Ed. Síntesis. Madrid.

BOYER, C.B. (1.986) *Historia de la matemática.* Alianza Editorial. Madrid.

CASCALLANA, M.T. (1988) *Iniciación a las Matemáticas. Materiales y recursos didácticos.* Ed. Santillana. Madrid.

COLERUS, E. (1.962) *Desde el punto a la cuarta dimensión.* Ed. Labor. Barcelona.

COURANT, R. Y ROBBINS, H. (1.979) *¿Qué es la Matemática?.* Ed. Aguilar. Madrid.

GARDNER, MARTIN (1.987) *Carnaval Matemático.* Alianza Editorial. Madrid.

HERNAN, F. y CARRILLO, E. (1.988) *Recursos en el aula de Matemáticas.* Ed. Síntesis. Madrid.

MEAVILLA, V. (1.986) *La Geometría como soporte de diversas cuestiones Matemáticas. Aplicaciones de la Geometría.* Documentación y propuestas de trabajo para grupos. MEC.

NEWMAN, J.R. (1.983) *Sigma, el mundo de las Matemáticas (Vol. I)* Ed. Grijalbo. (Barcelona).

PUIG ADAM, P. (1.981) *Curso de Geometría Métrica.* Ed. Gómez Puig. Madrid.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1984) *Historia de la Matemática (Vol. I)* Ed. Gedisa. Barcelona.