MI CALCULADORA NO FUNCIONA BIEN

MANUEL BARRANTES LÓPEZ
Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales
y de las Matemáticas
Universidad de Extremadura

RESUMEN

Pretendemos que mediante una serie de actividades con calculadora a las que denominamos **"actividades con teclas estropeadas"**, *el alumno conozca diferentes algoritmos para las operaciones, los cuales pueden ser los clásicos, de todos conocidos, o creados por el mismo alumno. Estas actividades, suponemos, le ayudarán para el estudio de las propiedades de los números y operaciones, así como en la práctica del cálculo aproximado.*

SUMMARY

MY CALCULATOR DOES NOT WORK

We are trying through a series of activities with the calculator, called **"activities with broken key"** *to make the pupil understand different algorisms for the mathematic operations, those which could be traditional, which everyone knows or created by the pupil himself.*

We presume these activities will help with the study of numbers and operations, as well as the practice of estimating calculus.

La utilización de la calculadora en el aula como una potente herramienta de trabajo es uno de sus usos más difundido y al que normalmente se ha dedicado mayor atención. Sin embargo, otro aspecto importante de estas máquinas es su utilización como ejemplo pedagógico plenamente integrado en la Enseñanza de las Matemáticas.

En este sentido hemos desarrollado una serie de actividades encaminadas a que el alumno trabaje a la vez que reflexiona e interioriza los diferentes algoritmos de resolución de operaciones.

Estas actividades, mediante la utilización de la calculadora de una forma inteligente, darán lugar a que el alumno conozca diferentes algoritmos de resolución para una misma operación, y harán que investigue y cree sus propios algoritmos ya que de todos es conocido que los algoritmos clásicos, aunque bastantes eficaces para el cálculo exacto, son poco útiles en el estudio de las propiedades de los números y operaciones y totalmente inútiles en los cálculos aproximados; pensemos, por ejemplo, en la raíz cuadrada.

Las actividades que proponemos tienen una característica motivadora para el alumno, que consiste en simular que alguna o algunas teclas de su calculadora están estropeadas y por eso las denominamos *"actividades con teclas estropeadas"*.

Dichas actividades pueden ser resueltas desde los niveles de Ciclo Medio de la Enseñanza Primaria hasta cualquier nivel de Enseñanza Secundaria.

Pasamos, pues, a enunciar y comentar este tipo de actividades que hemos desglosado en los siguientes apartados:

NO FUNCIONAN LAS TECLAS DE LAS CUATROS OPERACIONES BÁSICAS

En *Fielker, David S. (1986)* aparece una serie de ejercicios que consisten en simular que alguna tecla de operación básica no funciona bien y precisamente tenemos que realizar dicha operación, por ejemplo.

1.- Calcular una suma sin usar la tecla de sumar.

2.- Calcular una resta sin usar la tecla de restar.

3.- Calcular una multiplicación sin usar la tecla de multiplicar.

Podemos imponer condiciones:

4.- Calcular una división usando sólo la tecla de sumar.

5.- Calcular una división usando sólo la tecla de multiplicación.

6.- Calcular una división usando sólo la tecla de restar.

Como podemos observar, la solución a estos problemas no es única y hacen que el alumno, dependiendo de su nivel en Matemáticas, utilice diferentes recursos, como pueden ser cálculos aproximados, funciones propias de la calculadora o funciones matemáticas.

Así, si planteamos el ejercicio primero como calcular **125 + 83** sin usar la tecla de sumar este ejercicio admite distintas soluciones que pueden ser:

a) Usando la memoria de la calculadora (que suelen ser las teclas $\boxed{M^+}$ y $\boxed{MR}$).

$$\mathbf{125}\ \boxed{M^+}\ \mathbf{83}\ \boxed{M^+}\ \boxed{MR}\ \mathbf{208}$$

b) Con las teclas "menos" y "cambio de signo":

$$\mathbf{125}\ -\ \boxed{+/-}\ =\ \mathbf{208}$$

c) Con funciones trigonométricas que en expresión matemática sería:

$$\mathbf{125\ -\ 83 \cdot \cos 180^\circ}$$

d) Con la operación "menos":

$$\mathbf{125 + 83 = (125^2 - 83^2) / (125 - 83)}$$

Como podemos intuir existen muchas más soluciones para la resolución de este problema y todas ellas deben ser válidas para cualquier par de números, ya que nuestro objetivo es conseguir un algoritmo de resolución y no una solución para un caso particular.

En el ejercicio tercero, (el ejercicio segundo es similar al primero) pueden presentarse dos soluciones:

a) 6352 x 4 **b) 1234 x 325**

El primer caso es fácil, pues aunque no podemos utilizar la tecla de multiplicar, se puede resolver a partir de la suma de sumandos iguales. El segundo caso no sería muy viable resolverlo por este método. Podemos, por ejemplo utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación para su resolución:

$$\mathbf{(1000 + 200 + 30 + 4) \times 325}$$

Bastaría con obtener **325**, una, dos, tres y cuatro veces mediante la suma de sumandos iguales y añadir los ceros correspondientes, es decir:

UNA VEZ	**325**	**325000**
DOS VECES	**650**	**65000**
TRES VECES	**975**	**97450**
CUATRO VECES	**1300**	**+ 1300**
		401050

El resultado es pues **401050.**

Esta es sólo una forma de resolver este ejercicio. El alumno puede encontrar cualquiera otra resolución diferente con sus propios recursos, como ya hemos comentado.

Es interesante presentar también al alumno algunos algoritmos clásicos que tampoco utilizan la multiplicación en su resolución, como "por ejemplo" el utilizado por los campesinos rusos antes de ser introducidos los métodos convencionales y que solamente necesitaba de la capacidad de duplicar un número, división por dos y sumas. Lo desarrollamos para la operación anterior:

— Colocamos los números en dos columnas y dividimos el número de la primera por dos sucesivamente mientras vamos doblando el número de la segunda, o sea:

1234	**325**
617	**650**
308	**1300**
154	**2600**
77	**5200**
38	**10400**
19	**20800**
9	**41600**
4	**83200**
2	**166400**
1	**332800**

— Tachamos los números pares, y sus adyacentes y sumando los números de la segunda columna nos queda:

617	650
77	5200
19	20800
9	41600
1	+ 332800
	401050

Que es el mismo resultado ya conocido.

Una vez hechas estas indicaciones, dejamos en mano del lector el estudio de los ejercicios *4, 5, 6* cuya resolución y reflexión sobre los distintos algoritmos es también interesante.

¿QUÉ OTRAS TECLAS NO FUNCIONAN?

Continuando con la misma dinámica de actividades podemos plantearnos ahora que otras teclas podemos simular que no funcionan y para ello vamos a distinguir dos casos: que la calculadora sea o no científica.

Calculadora no científicas.

En los niveles de Enseñanza Primaria, donde las calculadoras que se recomiendan a los alumnos son no científicas, podemos encontrar pocas teclas además de los dígitos del 0 al 9, operaciones básicas y memoria. Entre ellas nos vamos a fijar en dos por sus interés que son las: teclas de tanto por ciento y la raíz cuadrada.

La tecla de "tanto por ciento" no existe en todas las calculadoras, y el simular que está estropeada en aquellas que existe tiene un tratamiento muy sencillo pues el alumno puede fácilmente llegar a obviar su uso por el de la secuencia "dividir por 100".

La raíz cuadrada presenta mayor variedad en el sentido de que existen una serie de algoritmos distintos para sus cálculos como los que podemos ver en el trabajo del *Grupo Azarquiel y J. Colera (1983)*, basados en métodos geométricos y en el método clásico de aproximación a partir de la definición de raíz cuadrada.

Desarrollamos éste último para el cálculo de raíz cuadrada de 7 en el siguiente cuadro:

a	a^2	$a < \sqrt{7} < b$	b^2	b
2	4	$2 < \sqrt{7} < 3$	9	3
2,6	3,76	$2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$	7,29	2,7
2,64	6,9696	$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$	7,0225	2,65
2,645	6,9966025	$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$	7,001316	2,646

Partimos de dos enteros consecutivos *a* y *b* que verifiquen:

$$a^2 < 7 < b^2$$

En el siguiente paso añadimos una cifra decimal a estos dos números hasta encontrar dos nuevos números consecutivos que verifiquen la desigualdad anterior y así sucesivamente (como podemos ver en el cuadro) hasta conseguir la aproximación deseada.

Mediante este método podemos observar que la utilización repetidamente de la definición de raíz cuadrada hace que el alumno pueda llegar a afianzar más fuertemente dicho concepto. La generalización a raíces n-ésimas es inmediata sin más que hacer los cálculos con potencias n-ésimas.

Un algoritmo curiosos que aparece en *Elie Vannier (1978)* para cálculo de raíces cuadradas es el siguiente:

Suponemos queremos calcular la raíz cuadrada de **1296.** Pedimos al alumno que nos de un número cualquiera que crea que se aproxima más a dicha raíz. Suponemos que elige el 30, entonces realizamos los siguientes pasos:

Dividimos **1296 / 30 = 43,2**

Realizamos la media **(30 + 43,2) /2 = 51,6**

Y volvemos a repetir los pasos anteriores, es decir:

$$1296 / 51{,}6 = 25{,}12 \qquad (51{,}6 + 21{,}12) / 2 = 38{,}36$$
$$1296 / 38{,}36 = 33{,}79 \qquad (33{,}79 + 38{,}36) / 2 = 36{,}08$$
$$1296 / 36{,}08 = 35{,}92 \qquad (36{,}08 + 35{,}92) / 2 = 36$$
$$1296 / 36{,}08 = 36$$

Obteniendo que dicha raíz vale **36.**

En dicho método cuanto más próximo sea el número elegido por el alumno como estimación, más rápidamente acaberemos el proceso.

Se puede comprobar, también, que dicho algoritmo es válido aunque la raíz cuadrada no sea un número entero. La justificación de dicho método puede ser facilmente deducible por el lector.

Calculadoras científicas.

Si la calculadora que utiliza el alumno es científica, recomendada para niveles superiores, el estudio se puede ampliar a otras teclas.

Las teclas más comunes en este caso, y que suelen aparecer en todos los modelos son: calculo de senos, cosenos, logaritmos, potencias, inverso, etc.

Nuestras actividades serán "pues" como las que sugieren los siguientes ejemplos:

— Calcular $1 / (\sqrt{2} + \sqrt{5})$ si no funcionan las teclas de inverso, raíz cuadrada y ni la memoria.

— Calcular el seno de cualquier ángulo sin usar la tecla del seno. Idem coseno.

— Calcular el logaritmo decimal de un número sin utilizar dicha tecla.

— Calcular $2^{0,125}$ sin la tecla de potencia.

En estos ejercicios entran en juego las relaciones existentes entre las funciones trigonométricas, logaritmos, etc y pueden servir para afianzar más dichas relaciones. El último ejercicio exige un técnica más precisa, una de cuyas soluciones puede ser consultada en el mencionado libro de *Grupo Azarquiel y J. Colera (1983).*

Una actividad resumen de todo lo comentado hasta ahora podría ser la siguiente:

¿QUE TECLAS SON REALMENTE IMPRESCINDIBLES EN MI CALCULADORA CIENTÍFICA?

¿MEDIANTE QUÉ OPERACIONES O ALGORITMOS PUEDO SUSTITUIR LAS TECLAS NO IMPRESCINDIBLES?

Para realizar esta actividad en el aula, así como cualquier otra con calculadoras, todos los alumnos deben utilizar el mismo modelo de máquina ya que lo contrario podría llevar al maestro a un auténtico caos.

DOS EJEMPLOS MÁS PARA QUE FUNCIONE.

Hay fracciones que por su peculiar construcción nos deparan agradables sorpresas a los ya iniciados en este tema de teclas estropeadas.

Por ejemplo si quisieramos calcular **4 / 6 - 4 / 10** usando solamente la tecla de multiplicar nos bastaría con sustituir el signo menos por el signo de la multiplicación, es decir, efectuaríamos **4 / 6 x 4 / 10** y obtendríamos el resultado de la diferencia.

Dicho resultado no es un golpe de magia sino que es debido a que en las fracciones de la forma **a / b** y **a / (a + b)** su diferencia y producto coinciden.

Así pues, en todo par de fracciones cuya forma general sea la dada anteriormente, podemos sustituir el signo menos por el producto y viceversa sin que el resultado varie.

Sobre el mismo tema el lector puede estudiar otras variaciones que se presentan que puedan ser con suma y división o resta y división como en los siguiente ejemplos:

a)	**16 / 45 + 4 / 9**	**16 / 45 : 4 / 9**
b)	**25 / 24 + 5 / 8**	**25 / 24 : 5 / 8**
c)	**49 / 10 - 7 / 2**	**49 / 10 : 7 / 2**
d)	**100 / 16 - 10 / 8**	**100 / 16 : 10 / 8**

Por último, presentamos un tipo de ejercicio que podemos denominar de cálculo mental con calculadora, en el que el alumno debe realizar las operaciones si usar papel. Como mucho se le puede permitir que apunte las estrategias a seguir.

Las teclas **2, 4, 5, 6, 7** y **8** de una calculadora no científica esta estropeadas, (¡vaya una calculadora!), sólo funcionan las teclas, **1, 3, 9,** y **0.** Calcular el producto **2456 x 78.**

Este es un problema típico de afianzamiento del concepto de valor posicional de los números, como el lector podrá observar al resolverlo, en el que el alumno puede desarrollar diferentes estrategias de resolución. Una variante de este problema consiste en considerar como teclas no estropeadas **1, 2, 3** y resolver cualquier operación.

BIBLIOGRAFÍA

— *Aguado Muñoz Prada, Ricardo (1982).* Las calculadoras en el aula. Anaya. S.A. Salamanca.

— *Canals Tolosa, Mª Antonia (1986).* El cálculo mental y la calculadora. Eumo.

— *Fielker, David S. (1986).* Usando las calculadoras con niños de diez años. Generalitat Valenciana.

— *Grupo Azaquiel y Colera, J. (1983).* La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico. I.C.E. U.A. Madrid.

— *Inform COCKCROFT. (1985).* Las Matemáticas si cuentan. M.E.C. Cap. 7 Madrid.

— *Langdon, Nigel (1985).* Calculos y habilidades con calculadoras. Lagos, S.A.

— *Vannier, Elie y otros. (1978).* Como jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo. Altalena, S.A. Madrid.

— *Vannier, Elie y otros. (1979).* Nuevas formas de jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo. Altalena, S.A. Madrid.

— *Udina i Abelló. (1989).* Aritmética y calculadoras. Síntesis. Madrid.