EL TEOREMA DE PITÁGORAS MEDIANTE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Pithagoras Theorem by Dynamics Geometry Software

Manuel Barrantes López *, Álvaro Noé Mejía López, Marcos Zapata Esteves **, Mª. Consuelo Barrantes Masot

**Universidad de Extremadura, **Universidad de Piura (Perú)*

Correspondencia:
Nombre y apellidos: Manuel Barrantes López
Mail: barrante@unex.es

Recibido: 28/0272017; Aceptado: 23/11/2017
DOI: https://doi.org/10.17398/0213-9529.36.2.151

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre las demostraciones algebraicas y geométricas del Teorema de Pitágoras, usando software de geometría dinámica, adecuadas para los cursos de la ESO. El trabajo presenta una categorización de las demostraciones, útil como herramienta para los docentes cuando se enfrentan a la selección de sus recursos didácticos relativos a este tema. Así, proporcionamos un conjunto de construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra y los pasos necesarios para su construcción, que sirva de apoyo tanto al docente como al alumno.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras; software geometría dinámica; enseñanza de la geometría; demostraciones geométricas; demostraciones algebraicas.

Abstract

This study is about the geometric and algebraic proofs of the Pythagorean Theorem using dynamic geometry software, concerned to secondary school levels. In it is presented a proofs categorization very useful as a tool for teachers, especially when they are looking for teaching resources. Thus, the research provides a set of dynamic constructions designed using GeoGebra and those steps followed in order to build them, which are a good support for both teachers and students.

Keywords: Pythagorean theorem, dynamic geometry software; teaching geometry; geometric proofs; algebraic proofs.

INTRODUCCIÓN

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Esta celebre proposición, conocida como el Teorema de Pitágoras, la proposición pitagórica o la proposición 47 del primer libro de los Elementos de Euclides ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Y, aunque muchas son sus aplicaciones en este campo, nuestro trabajo va orientado principalmente a resaltar el interés didáctico de dicha proposición en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y en particular de la Geometría.

En muchos centros se cuenta con materiales didácticos concretos destinados al fortalecimiento del proceso de la enseñanza de la geometría en los primeros años de la ESO, sin embargo, a veces la comunidad docente no suele utilizar de metodologías de enseñanza, en las que se haga uso de software de geometría dinámica.

Así pues, el objetivo general de este trabajo ha sido el de presentar de manera selectiva, construcciones dinámicas que contribuyan a la enseñanza del Teorema de Pitágoras haciendo uso de software de geometría dinámica, como resultado de una revisión actualizada. Para cumplir este objetivo se ha realizado una aproximación mediante una revisión bibliográfica así como una exploración de las construcciones dinámicas del teorema que ofrece Internet. A partir de este material se ha realizado una selección y clasificación de las construcciones dinámicas encontradas a las que hemos añadido nuestras propias construcciones que complementan la revisión general y añaden un componente didáctico además de reforzar y mejorar su adaptación al aula.

Enfoque histórico de la proposición Pitagórica

No es nada nuevo afirmar que la introducción de la historia de las matemáticas en las actividades del aula enriquece bastante la enseñanza de esta materia. Ahora bien, cuando las actividades se reducen a la inclusión de la biografía de un personaje determinado o de algún hecho aislado relacionado con la materia a tratar, entonces el atractivo y la utilidad de los materiales históricos para la enseñanza quedan muy limitados.

Una más directa aproximación al aprovechamiento matemático de estos materiales en la enseñanza se puede conseguir proponiendo al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición o problemas relacionados con ella, transportando a éstos a la época en las que fueron realizadas. Para ello, además de comentar la biografía del autor (Bergua, 1958; Schuré, 1995; Caniff, 1997) podemos examinar qué conocimientos poseían los autores para realizar esa demostración concreta y qué métodos utilizaban para ejecutarla. De esta forma, los alumnos pueden experimentar y sentir las dificultades y logros de problemas que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos. Las demostraciones dinámicas ayudan bastante para conseguir estos objetivos.

Son varias las fuentes bibliográficas en las que podemos encontrar información acerca de las distintas demostraciones que se le pueden dar al Teorema de Pitágoras. Loomis (1972), hace una recopilación, y es la colección más importante de pruebas y demostraciones del teorema. Su obra posee 370 pruebas o demostraciones con sus correspondientes figuras realizadas de forma artesanal, con las letras manuscritas y sus demostraciones formales.

Las primeras son las pruebas algebraicas, 109 en total, y están basadas en las relaciones que hay entre lados y segmentos. Después presenta un gran número de pruebas geométricas, 255 en total, basadas en la comparación de áreas. El texto sigue con 4 pruebas dinámicas, que se basan en los conceptos de masa, velocidad, fuerza y otros conceptos físicos. Y por último se encuentran 2 pruebas basadas en operaciones vectoriales, también conocidas como pruebas cuaterniónicas.

De igual forma, Nelsen (1993), con el objetivo principal de proporcionar pistas en cada demostración para estimular el pensamiento matemático, presenta una recopilación de demostraciones matemáticas a través de imágenes o diagramas. El texto incluye 7 demostraciones del Teorema de Pitágoras.

En autor (1998), se hace un estudio del Teorema de Pitágoras por medio de una aproximación histórica al mismo, la presentación de recursos y materiales para trabajar la propiedad pitagórica, problemas, juegos y curiosidades relacionadas con el teorema.

En nuestro trabajo, hemos tomado las dos principales vías de demostración del teorema, es decir: la analítica o algebraica y la visual o geométrica como más adecuadas para la enseñanza en la ESO. En la analítica o algebraica se realizan cálculos para demostrar la igualdad entre la suma de los dos catetos al cuadrado y su hipotenusa al cuadrado (como en el caso de las demostraciones de Leonardo da Vinci o de Garfield); en la visual o geométrica dividimos los cuadrados de los catetos hasta obtener unas formas deseadas capaces de encajar dentro del cuadrado de la hipotenusa.

También, debemos decir, que el estudio parte de una revisión de la legislación educativa vigente, que es el elemento normativo básico que rige el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el de Bachillerato para la Comunidad Autónoma de Extremadura, se establece en el Decreto 127/2015, de 26 de mayo, de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 6 de la Ley Orgánica de Educación 2/2006. Concretamente hemos estudiado los aspectos relacionados con la asignatura de Matemáticas en el bloque de Geometría, y específicamente en los temas concernientes al Teorema de Pitágoras.

Dicho currículo hace mención a la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución. Además, se plantea que el uso continuado de materiales diversos y de herramientas tecnológicas pueden servir de estrategias metodológicas fundamentales en todo el proceso, debido a que la manipulación de materiales genera una actividad cerebral que facilita la comprensión; el aprender haciendo incide en el desarrollo de destrezas y habilidades por parte del alumnado.

Software de Geometría Dinámica

En diferentes textos y artículos como Alsina, Fortuny y Burgués (1988), se ofrecen métodos y recursos que ayudan a la resolución de problemas en geometría, mediante materiales concretos o instrumentos geométricos, entre otros. Además de estos recursos añadimos la geometría dinámica como un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana. Este recurso se fundamenta en la tecnología y las herramientas que nos proporciona, ya que a través de ellas podemos movilizar las figuras geométricas para que adquieren dinamismo (Cabrera y Campistrous, 2007).

Así pues las tecnologías proporcionan herramientas que pueden ayudar, potenciar y hacer evolucionar de un modo revolucionario la enseñanza de la geometría. Los procesadores geométricos han sido el primer paso en esa dirección (Costa, 2001). Un procesador de geometría dinámica es todo software que permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas, y no de su apariencia, sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar,…) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan.

Con el paso del tiempo han surgido una gran variedad de procesadores con funcionalidades propias de la geometría clásica, y otros que integran elementos del álgebra, del cálculo y muchas otras funciones como la de revisar los pasos de la construcción, insertar un control deslizante, marcar lugares geométricos, etc. Por mencionar algunos, se tiene: *Cabri, Sketchpad, Cinderella, GeoGebra, Geonext, R y C* (Regla y Compás), *Kig, Zirkel, CarMetal*, entre otros.

Con esta nueva concepción de la enseñanza de la geometría, se evitan las figuras rígidas que se corresponden con una única forma de representación y se apuesta por que los alumnos se hagan una idea general de las figuras y que puedan comprender las propiedades geométricas, mediante un gran número de representaciones. Los software de geometría dinámica sirven de plataforma para que los profesores incursionen en este campo de las matemáticas que está en auge, ya que posee capacidades gráficas que favorecen la realización de visualizaciones en tres dimensiones (Bagazgoitia, 2003).

Por último, López, Alejo y Escalante (2013) refuerzan el uso de software de geometría dinámica como medio para la resolución de problemas geométricos y cómo se potencian las posibilidades de representación y dinamismo, lo cual hace que estos recursos se conviertan en una herramienta válida de aprendizaje.

Nuevas posibilidades didácticas en la demostración del teorema: GeoGebra

El uso de los software de geometría dinámica aumenta las posibilidades didácticas pues además de utilizarse como apoyo a las explicaciones, da al alumnado posibilidades para visualizar figuras, modificarlas y construirlas, así como de observar, buscar la solución, describir, conjeturar, comprobar e investigar. En definitiva, actividades para que sean ellos quienes hacen y aprendan más a partir de su experiencia que de lo que se les cuenta (Sada, 2010).

En este sentido, hemos elegido GeoGebra por ser un software libre y de acceso abierto con una estética muy amigable y atractiva y un lenguaje adecuado para los dicentes. GeoGebra proporciona, también, el seguimiento de las acciones de los alumnos a través del protocolo de construcción, lo que permite ver paso a paso cómo se han desarrollado los objetos construidos.

El desafío para los profesores de matemática es el encontrar maneras en las cuales las demostraciones geométricas tengan funciones comunicativas, exploratorias y explicativas a lo largo de su justificación y verificación. Además, si la demostración formal juega un rol dentro del currículo, es necesario diseñar y evaluar actividades innovadoras que hagan que los alumnos establezcan conexiones entre el razonamiento empírico con el deductivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. GeoGebra ayuda a los profesores a encontrar nuevos contextos a través de los cuales se pueda introducir el uso de enunciados y definiciones e introducir procesos de deducción que posibiliten hacer conexiones con justificaciones empíricas.

Es sabido que si una demostración formal geométrica es presentada solo como una forma de demostrar algo que los alumnos ya están convencidos de que es cierto, entonces la demostración es una actividad sin ninguna transcendencia (Tall, 1992). Por tanto, si los alumnos no conocen el objetivo y la importancia de desarrollar una demostración, esta no es usada como parte de la resolución del problema, y es tomada como irrelevante.

Coincidimos con Jones y Hoyles (2012), que argumentan que el ordenador, como herramienta facilitadora para la construcción de figuras complejas, puede servir de contexto para tal fin, a pesar de ello, no se puede asumir que esto produzca un cambio. Sin embargo, el reto es construir nuevas experiencias de aprendizaje con el apoyo de las tecnologías actuales, las cuales guardan un gran potencial en sí mismas. Para ello, se necesita diseñar experiencias de aprendizaje adecuadas, en las que los alumnos se enfrenten a las demostraciones como un hecho para explicar algo (Hanna, 1989), al mismo tiempo que despertamos su curiosidad.

Así pues, el uso de un paquete de geometría dinámica como GeoGebra, permite generar experiencias de aprendizaje en las que los alumnos se pregunten el por qué, y el qué sucedería si…,de ciertos hechos geométricos, aportando una oportunidad para desarrollar una base para llegar a una completa apreciación de la naturaleza y el propósito de la demostración matemática.

El uso de GeoGebra, a través de la guía del profesor y las experiencias de aprendizaje que suministra, puede servir de plataforma para que los alumnos construyan objetos geométricos por ellos mismos, hagan conjeturas acerca de las relaciones entre los objetos, y prueben la verdad de esas conjeturas de varias maneras de forma interactiva, y no solo de la manera lineal a como se está acostumbrado dentro de una enseñanza tradicional.

METODOLOGÍA

El trabajo se realizó en dos fases, una primera fase de primer contacto con las demostraciones del Teorema de Pitágoras en general, y una segunda enfocada en su selección, clasificación y posterior diseño con el programa GeoGebra.

Durante la primera fase se revisaron las demostraciones desechando aquellas que tenían semejanzas con otras demostraciones, o aquellas que consideramos no adecuadas al nivel educativo al cual fue orientando la investigación, debido a la propia complejidad de éstas. La segunda fase fue útil principalmente para realizar la selección definitiva de las demostraciones y para ir perfilando su clasificación. La formación de las categorías de análisis (nivel educativo y tipo de demostración: geométrica y algebraica) fue un proceso que se sustentó en la revisión bibliográfica realizada así como en los objetivos de la investigación. Se han tenido en cuenta aquellas demostraciones tanto algebraicas como geométricas de matemáticos famosos a lo largo de la historia, y cuyas demostraciones han causado un impacto en el campo de la geometría.

El texto de Loomis (1972) nos ha servido de guía principal a lo largo del estudio así como González (2008) que hace un estudio sobre las distintas demostraciones del teorema a lo largo de la historia. También, las demostraciones encontradas en Internet en distintas páginas web y en el repositorio de materiales de la página oficial de GeoGebra nos han facilitado el diseño de la parte dinámica (ver webgrafía).

En este trabajo, para cada una de las demostraciones se presenta una ficha en la que se incluye una imagen inicial y otra final de la prueba, el procedimiento generalizado utilizado para su construcción, una explicación justificativa de la demostración formal y dicha demostración.

La codificación de las construcciones dinámicas se realizó en base a las categorías de análisis. El primero es una enumeración de las pruebas en un orden ascendente atendiendo al nivel educativo al que pertenecen. El segundo asigna un I si la prueba es geométrica y un II si es algebraica. Se han considerado las pruebas geométricas y algebraicas del teorema, adecuadas al nivel educativo de la ESO dentro del marco curricular estudiado. Sin embargo, las pruebas basadas en operaciones vectoriales y las pruebas dinámicas se han descartado ya que su contenido no es apto para dicha etapa educativa.

El tercero corresponde al nivel académico en donde se estudia el Teorema de Pitágoras en la Educación Secundaria según el análisis del currículo que se llevó a cabo al principio de la investigación así, A indica que la prueba es adecuada para los contenidos de 1º de la ESO, una B si lo es para 2º de la ESO y una C si es apropiada para 4º de la ESO.

En el estudio se pretendía también hacer la codificación tomando en cuenta la variable de las herramientas utilizadas en GeoGebra para diseñar las construcciones dinámicas, pero esta clasificación no se pudo realizar debido a que en la mayoría de las pruebas se utilizaron de modo general las mismas herramientas ofrecidas por este software y no la hemos considerado relevante.

RESULTADOS

En el estudio general encontramos un total de 97 construcciones dinámicas sobre las pruebas geométricas y algebraicas del teorema de Pitágoras de las cuales aproximadamente dos tercios del total de construcciones han sido obtenidas directamente de los *Libros GeoGebra* encontradas en la página oficial de GeoGebra, y el tercio restante de las construcciones que han sido obtenidas de otros sitios web, entre los que se encuentran el *Proyecto Gauss* y *Proyecto Descartes*. Estas pruebas coinciden en su gran mayoría con las comentadas anteriormente en la revisión bibliográfica realizada.

En total, hemos seleccionado 28 demostraciones del Teorema de Pitágoras realizadas con GeoGebra. De ellas, 10 son demostraciones algebraicas y 18 geométricas. Estas pruebas, se han clasificado de acuerdo al nivel educativo para el que están orientadas, obteniéndose6 para 1º ESO, 12 para 2º ESO y 10 para 4º ESO. De igual forma, las pruebas han sido convenientemente adaptadas y reformadas para una mayor comprensión de los alumnos a los que van dedicadas.

Como podemos ver en el Cuadro 1 que se adjunta, las 6 pruebas dirigidas a 1º ESO, son básicamente pruebas puzles, de manera que las piezas en que se dividen los cuadrados construidos sobre los catetos deben rellenar el cuadrado dibujado sobre la hipotenusa. Esta es una forma motivante para trabajar la relación pitagórica, ya que ayuda al alumno a desarrollar un comportamiento más inteligente que de tipo reflejo o automático. En la muestra de este artículo, que encontramos a continuación, hemos desarrollado detalladamente uno de ellos.

Las 12 pruebas geométricas dirigidas a 2º ESO, son pruebas realizadas por matemáticos célebres o personalidades de otros campos, simpatizantes de las matemáticas que han tenido la tentación de realizar una prueba de dicho teorema. Para la muestra hemos seleccionados pruebas clásicas y muy conocidas como son las pruebas de Euclides y Platón, y otra más actual del matemático Poo-Sung-Park.

Y por último, están las 10 pruebas algebraicas de 4º ESO, también pruebas realizadas por celebridades de todos los tiempos entre las que se encuentran las del presidente James A. Garfield y el matemático E.S. Loomis que mostramos más detalladamente en este artículo.

Si el lector está interesado, el resto de pruebas clasificadas pueden ser consultadas de manera electrónica en el Libro de GeoGebra “Pruebas del Teorema de Pitágoras”, en la página webhttps://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB . También, en la siguiente tabla están reflejadas todas las demostraciones construidas en el estudio.

Tabla 1: *Demostraciones estudiadas del Teorema de Pitágoras.*

GEOMÉTRICAS		ALGEBRAICAS
1º ESO	2º ESO	4º ESO
1.Puzzle 1: Hipotenusa/cateto menor=3	7.Euclides	19.Bashkara
2.Puzzle 2: 30º≤A≤60º y 30º≤B≤60º	8.Liu Hui	20.Chou-Pei-Suan
3.Puzzle 3: Cateto mayor/cateto menor=2	9.Platón	21.Pappus
4.Puzzle 4: Triángulo rectángulo isósceles	10.Dobriner	22.Vieta
5.Puzzle 5: Lados 3, 4 y 5	11.Perigal	23.Garfield
6.Caso Particular (Loomis 4)	2.Ozanam	24.Leonardo da Vinci
	13.J. Adams	25.H. Boad
	14.Hoffmann	26.Loomis 108
	15.Loomis 2	27.Thâbit IbnQurra (a)
	16.Loomis 26	28.Thâbit IbnQurra (b)
	17.Poo-Sung-Park	
	18.A. G. Samosvat	

A continuación se muestran 6 ejemplos de las construcciones dinámicas construidas, cada una en su propia ficha y explicada en base a su contenido.

Ejemplo1: Puzle (Cateto mayor/cateto menor =2)

Esta prueba de la relación pitagórica posee el código (3.I.A), que significa que es la ficha número 3 en orden ascendente de acuerdo al nivel académico al que pertenece, además que es una prueba de tipo geométrica y por último también se sabe que el uso de la construcción es más indicada para 1º ESO debido a la facilidad que presenta. En esta construcción se debe cumplir que la razón entre el cateto mayor y el cateto menor sea igual a dos de ahí viene el nombre dado.

Además de presentarlo como una construcción dinámica, este puzle también se puede realizar en madera u otros materiales y ser presentado a los estudiantes como un material concreto de geometría, tal como se plantea en autor (1990) que incluye esta prueba del teorema y en el que se elige trocear en piezas de puzles las figuras geométricas construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo, para después recubrir con estas piezas la figura construida sobre la hipotenusa.

FICHA: Puzle 3 **Código:** 3.I.A

Momento 1 **Momento 2**

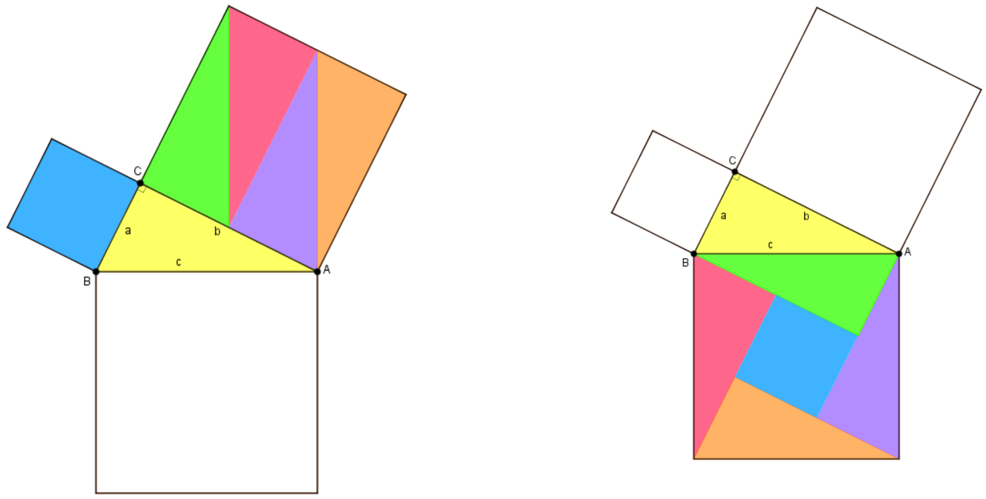

Figura 1: *Cateto mayor/cateto menor =2.*

Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (amarillo)
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados
3. Se construyen cuatro polígonos en el cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo ABC, todos los polígonos son semejantes al triángulo inicial
4. Se construye un cuadrado (azul) sobre el cateto menor del triángulo ABC
5. Se trasladan los seis polígonos construidos para completar el cuadrado que está sobre el lado c del triángulo ABC.

Explicación:

Este puzle es válido solo en el caso de que el triángulo rectángulo inicial cumpla que la razón entre el cateto mayor entre el cateto menor sea dos. Al hacer la traslación de los cuatro polígonos en que se divide el cuadrado construido sobre el cateto mayor del triángulo ABC y el cuadrado construido sobre el cateto menor del triángulo inicial, se observa que estos son congruentes con el área del cuadrado construido a partir de la hipotenusa del triángulo ABC. Eso es, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración:

Como se puede observar la demostración es puramente visual, por lo que no tiene sentido realizar cálculos algebraicos

Ejemplo 2: Prueba de Platón.

Esta demostración tiene el código (9.I.B), por lo que es la ficha número 9, es una prueba de tipo geométrica indicada para 2º ESO, ya que a manera de puzle se puede observar como encajan todas sus piezas. Es mejor conocida como la prueba de Platón, siendo además clasificada en Loomis (1972) como la prueba número 98.

Esta demostración aparece en el diálogo Menón o de la virtud de Platón. El alumno puede conocer que Platón era un famoso filósofo griego seguidor de Sócrates y maestro de Aristóteles.

La prueba aplica el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles en el que los cuadrados construidos sobre los dos catetos (lados iguales) pueden ser divididos en dos triángulos con base la diagonal obteniéndose así cuatro triángulos que encajan perfectamente en el cuadrado construido sobre la hipotenusa (lado desigual).

FICHA: Prueba de Platón (Loomis 98) **Código:** 9.I.B

Momento 1 **Momento 2**

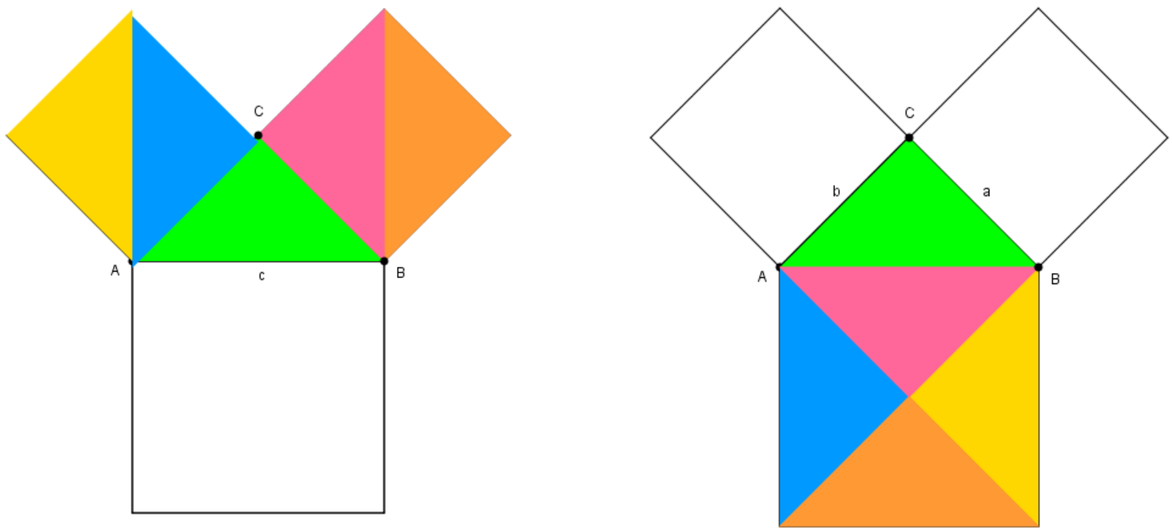

Figura *2: Prueba de Platón*

Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (verde)
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados
3. Se construyen dos triángulos de igual área (amarillo, verde) en el cuadrado construido sobre el cateto de lado b
4. Se construyen dos triángulos de igual área (rosa, naranja) en el cuadrado construido sobre el cateto de lado a
5. Se trasladan estos cuatro triángulos hasta cubrir el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo ABC

Explicación:

Al trasladar los cuatro triángulos congruentes construidos en los cuadrados de lados iguales a las longitudes de los catetos del triángulo ABC se observa que estos son congruentes con el área del cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo ABC. Eso es, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración:

Como se puede observar la demostración es puramente visual, por lo que no tiene sentido realizar cálculos algebraicos.

Ejemplo 3: Prueba de Euclides.

Esta demostración de la relación pitagórica posee el código (7.I.B), es una prueba de tipo geométrica indicada para 2º ESO. Es conocida como la prueba de Euclides y es clasificada en Loomis (1972) como la prueba número 33.

Euclides fue el primer matemático en demostrar geométricamente el Teorema de Pitágoras. Dicha demostración se encuentra en su libro Los Elementos numerada comoI.47.El alumno puede investigar también sobre dicho texto y saber que comienza con la definición de "punto" y termina con el Teorema de Pitágoras enunciado a la inversa: Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo, es igual al cuadrado del tercer lado, se trata de un triángulo recto. La demostración basada en equivalencia de triángulos también puede ser consultada en Thomas (1985) donde aparece de una forma convenientemente desarrollada.

FICHA: Prueba de Euclides (Loomis 33) **Código:** 7.I.B

Momento 1 **Momento 2**

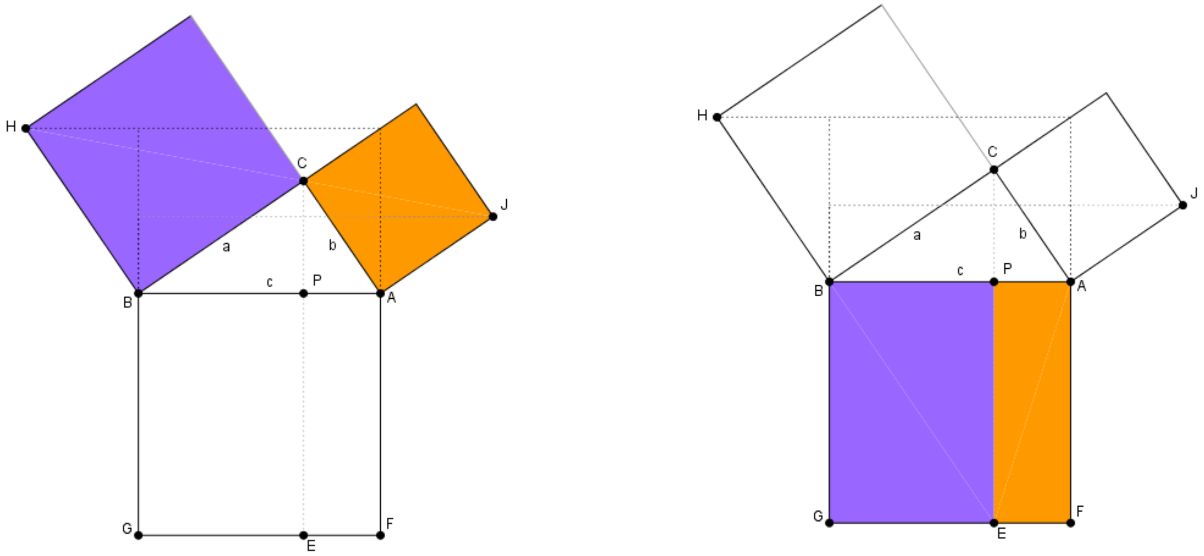

Figura 3: *Prueba de Euclides.*

Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados
3. Se construye una recta perpendicular CPE a la hipotenusa
4. Se dividen los cuadrados construidos sobre los catetos en triángulos semejantes
6. Se traslada el cuadrado construido sobre el cateto mayor al rectángulo BPEG
7. Se traslada el cuadrado construido sobre el cateto menor al rectángulo PAFE

Explicación:

La recta CPE divide el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo ABC en dos rectángulos que tienen áreas iguales a las de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo inicial. Es decir, el área del rectángulo BPEG es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto mayor y el área del rectángulo PAFE es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto menor del triángulo ABC. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración:

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A_1 es el área de los cuadrados construidos sobre los catetos y A_2 el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, esto es:$A_1 = a^2 + b^2$ y $A_2 = c^2$. Se tiene que $\angle HBA = \angle CBG$ ya que cada uno de ellos es $\angle CBA + 90° \Longrightarrow$ ΔHBA y ΔCBG son congruentes y su área es la misma área. Pero el ΔHBAes igual al área de $\triangle BHC$ porque la altura sobre la base BH es la misma, y el área de ΔCBGes igual al área de ΔBGPporque la altura sobre la base BG es la misma. Entonces el rectángulo BOEG es igual al cuadrado sobre el cateto mayor. De la misma manera, el rectángulo PAFE es igual al cuadrado sobre el cateto menor. Como A_1=A_2, se tiene que, $a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo 4: Prueba de Poo-Sung-Park.

Tal demostración de la relación pitagórica posee el código (17.I.B), es una prueba de tipo geométrica y el uso de la construcción es más indicado para 2º ESO. Esta prueba de la relación pitagórica es de tipo geométrico y es atribuida al matemático Poo-Sung-Park, y aparece en Mackenzie y Nelsen (1993). Poo-Sung-Park es un físico procedente de Corea del Sur que ha realizado su tesis doctoral en mecánica cuántica en la Universidad Nacional de Seúl.

FICHA: Prueba de Poo-Sung-Park **Código:** 17.I.B

Momento 1 **Momento 2**

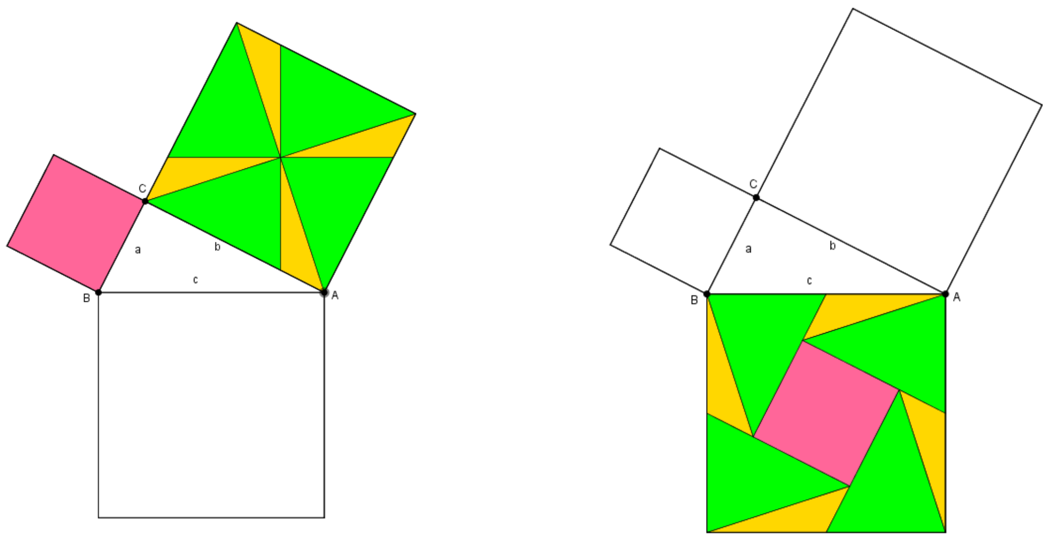

Figura 4: *Prueba de Poo-Sung Park.*

Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (blanco)
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados
3. Se trazan las diagonales del cuadrado construido en el cateto mayor, formando cuatro triángulos isósceles rectángulos (verdes)
4. Por último se trasladan los cuatro triángulos isósceles rectángulos, sobre cada uno de los lados del cuadrado menor (rosa) y se construye un cuadrado (verde y amarillo) uniendo las cimas de los cuatro triángulos isósceles (amarillas)

Explicación:

Cuando se trasladan los triángulos isósceles rectángulos sobre cada uno de los lados del primer cuadrado, se construye un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de este cuadrado será igual a la suma de las áreas del primer cuadrado y los cuatro triángulos isósceles rectángulos y los triángulos sobrantes, de cada uno de los triángulos isósceles rectángulos, que van a cubrir esa misma área dentro del cuadrado grande. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración:

Sean a y b los catetos del triángulo ABC y c su hipotenusa, además, A_1 es el área del cuadrado construido sobre el cateto menor, A_2 el área del cuadrado construido sobre el cateto mayor y A_3 es el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, esto es: $A_1 = a^2$, $A_2 = 4(b^2/4)$ y $A_3 = c^2$. Al comparar sus áreas, se tiene que $A_1 + A_2 = A_3$, por tanto, $a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo 5: Prueba de Garfield.

Esta demostración de la relación pitagórica posee el código (23.II.C), es una prueba de tipo algebraica y es más indicada para 4º ESO debido a la complejidad que presenta. Esta prueba realizada por Garfield es de tipo algebraica y es clasificada en Loomis (1972) con el número 231.

James A. Garfield fue el vigésimo presidente de los Estados Unidos. Fue matemático aficionado y cinco años antes de convertirse en presidente, obtuvo una demostración de la relación pitagórica mientras era miembro de la Cámara de Representantes de su país.

Esta demostración tiene la particularidad de ser muy ingeniosa y puede servir al profesor para relacionar la propiedad pitagórica con el cuadrado de la suma de un binomio, también estudiado en estos cursos.

FICHA: Prueba de Garfield (Loomis 231) **Código:** 23.II.C

Momento 1 **Momento 2**

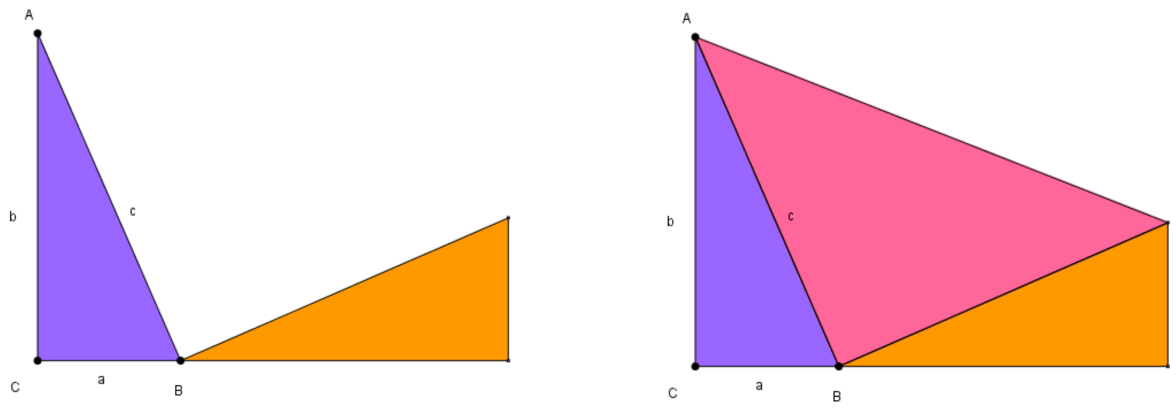

Figura 5: *Prueba de Garfield.*

Procedimiento:

1. Se construye un triángulo rectángulo (morado)
2. Se rota este triángulo 90º
3. Este nuevo triángulo se traslada hacia la derecha (naranja)
4. Luego se construye el triángulo rectángulo que se forma (rosa)

Explicación:

Cuando se realiza la rotación y traslación del triángulo ABC, se forma un trapecio. El área de este será igual a la suma del área de los 3 triángulos rectángulos que lo conforman. Al realizar la comparación de área se obtiene la relación pitagórica.

Demostración:

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A_1 es la suma del área de los triángulos rectángulos que conforman el trapecio y A_2 es el área del trapecio. Comparando las áreas se obtiene: $A_1 = 2\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2/2$y

$$A_2 = ((b+a)(b+a))/2 = (a^2 + 2ab + b^2)/2.$$

Como $A_1 = A_2$se tiene que, $\frac{a^2+2ab+b^2}{2} = ab + c^2/2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo 6: Prueba de Loomis.

Esta demostración posee el código (26.II.C), es una prueba de tipo algebraica y es más indicada para 4º ESO. Es una extensión del teorema y es clasificada en Loomis (1972) con el número 108 y es de autoría del mismo autor.

En 1933, Loomis, matemático estadounidense, plantea una extensión del Teorema de Pitágoras en la que establece que la relación pitagórica se mantiene para cualquier polígono regular construido a partir de triángulos isósceles construidos sobre el triángulo inicial. La propiedad pitagórica no es válida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.

FICHA: Prueba de Loomis 108 **Código:** 26.II.C

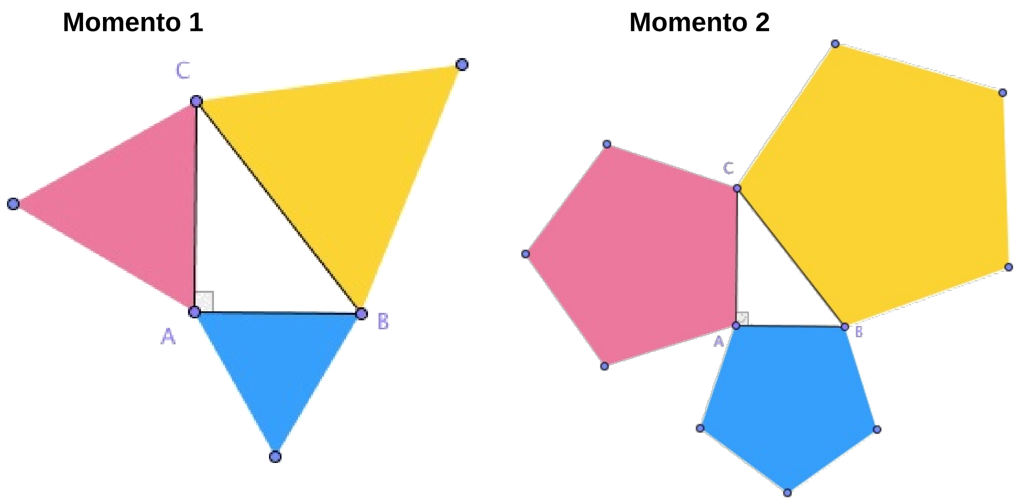

Figura 6: *Prueba de Loomis.*

Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (blanco)
2. Se construyen polígonos regulares sobre sus lados: triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, etc.
3. Se comparan las áreas de estos polígonos para comprobar la relación pitagórica

Explicación:

La misma relación pitagórica establecida con los triángulos y cuadrados construidos a partir de los lados de un triángulo equilátero, es mantenida si construimos sobre los lados del triángulo equilátero polígonos regulares. Es decir, cualquier polígono regular de lado igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los polígonos regulares construidos de lados igual a la longitud de los catetos del triángulo rectángulo.

Demostración:

En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb2, ka2, kc2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura. Si las figuras son semejantes se va a verificar quekb2 + ka2 = kc2, donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un conjunto de construcciones dinámicas sobre las pruebas geométricas y algebraicas del Teorema de Pitágoras, construidas con GeoGebra de manera selectiva, en base a una revisión actualizada y habiendo pasado por un proceso de clasificación y diseño, en el que se incluyeron elementos didácticos (procedimiento y explicación) para favorecer su uso en el proceso enseñanza-aprendizaje del teorema.

Estas construcciones, consideramos, son un recurso importante para que el profesor trabaje la propiedad pitagórica de una manera activa y dinámica pudiendo además seleccionar, entra la gran variedad de pruebas que ofrecemos, las que considere más acordes para el aprendizaje de sus alumnos.

Entendemos que el uso de software de geometría dinámica se ha convertido en un recurso que, combinado con el correcto uso del profesor, puede favorecer el aprendizaje en los alumnos debido al dinamismo en las construcciones, lo que permite que haya una interacción entre el conocimiento, el alumno y el profesor a través de las construcciones geométricas.

El estudio propone al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición pitagórica a la vez que se revaloriza la importancia de la prueba pitagórica, haciéndoles observar la cantidad de personas famosas, matemáticos o no, que se han preocupado por ella.

Las actividades dinámicas permiten explorar visualizaciones de la prueba pitagórica favoreciendo la construcción de conocimientos, a través de la manipulación directa del software de geometría dinámica; acciones que serían más trabajosas utilizando lápiz y papel.Los alumnos experimentan dificultades y logros de actividades que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos

En futuros trabajos abordaremos las aplicaciones del teorema de Pitágoras con el diseño de construcciones dinámicas que tengan que ver con problemas, juegos y curiosidades del mismo (autor, 1998). Entre algunos de estos problemas, se pueden mencionar los cuadrados mágicos pitagóricos, las ternas pitagóricas, el problema del inverso del teorema, problemas de la historia de las Matemáticas, la generalización al espacio, el análogo del teorema en la geometría sólida y la relación entre el teorema y la sucesión de Fibonacci.

El Teorema de Pitágoras está también abierto a la consideración de las pruebas dinámicas y vectoriales, a la vez que se puede investigar dicho tema a nivel de Bachillerato y en el área de la formación de profesores.

Evidenciamos de esta manera la importancia y posibilidades que tiene el Teorema de Pitágoras dando lugar a un sin número de demostraciones y aplicaciones que lo convierten en un auténtico problema abierto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis. Madrid

Alsina, C. (1997). *¿Por qué geometría?: Propuestas didácticas para la ESO*. Síntesis. Madrid

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma: revista de matemáticas*, (33), 165-179.

Bagazgoitia, A. (2003). Geometría con Cabri. *Sigma: revista de matemáticas*, (22),83-98.

Barrantes, M. (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Manuales UEX, Nº 22. Unex. Badajoz

Barrantes, M. y Blanco L.J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números*, 62. 33-44

Barrantes, M. (1990). Pitágoras en el país de los puzzles. *Campo Abierto*. Revista de Educación, 7(1), 221-230.

Bergua, J. B. (1958): *Pitágoras*. Ed. Ibéricas. Madrid.

Cabrera, C. R., y Campistrous, L. A. (2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13(45),61-79.

Caniff, P. (1997). *Pitágoras*. M.E. Editores, S.L. Madrid.

Costa, A. (2001). Cinderella. Programas informáticos en matemáticas. *La Gaceta*, 4 (1), 273- 278

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 37–52.

González, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma: revista de matemáticas*, (32), 103-130.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 55-70.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the Thirteenth Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2, 45-51.

Hoyles, C. y Jones, K. (1998) Proof in dynamic geometry contexts In, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* GB, Springer. Londres. 121-128. (An ICMI Study).

Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean proposition*. National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D.C.

López, A. S., Alejo, V. V. y Escalante, C. C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números*, (82), 65-87.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. *An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers (New ICMI Studies Series; No. 5). Dordrecht.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America. Washington D.C., USA

Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 589-598.

Rey Pastor, J., y Babini, J. (1984). *Historia de la Matemática*. Geodisa. Barcelona

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof, En D. A. Grouws (ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing. New York. 495-511.

Sada, M (2010). *Algunas de las posibilidades didácticas de GeoGebra en las aulas*. II Jornadas de Integración de las TIC en la Enseñanza. Madrid.

Schuré, E. (1995): *Los grandes iniciados*. Vol. II. REI Argentina. Buenos Aires.

Referencias Legales

Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de Mayo.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato.

Decreto 127/2015, de 26 de mayo, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato para la comunidad Autónoma de Extremadura.

Webgrafía

https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB

El Libro de GeoGebra "Pruebas del Teorema de Pitágoras", creado por Álvaro Mejía, contiene 28 applets que contienen pruebas dinámico-geométricas y dinámico-algebraicas sobre la relación pitagórica.

https://www.geogebra.org

Es la página oficial de GeoGebra, software de geometría dinámica que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Es la página web del Proyecto Gauss que brinda al profesorado una gran variedad de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web

La web del Proyecto Descartes ofrece materiales didácticos interactivos, basados en la visualización y en la interacción con los elementos matemáticos, para los niveles de Primaria, ESO y Bachillerato

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/

La página "Webs interactivas de Matemáticas", agrupa diversos temas de los currículos de Matemáticas de ESO y Bachillerato en la que, mediante gráficos interactivos, el alumno recibe una ayuda significativa para la comprensión de la matemática.

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

El sitio web "Actividades con GeoGebra" incluye actividades de matemática realizadas con GeoGebra en la que se facilitan recursos para la enseñanza de la geometría a nivel de la ESO y de Bachillerato.

http://tube.geogebra.org/student/b615817#

El Libro de GeoGebra "Proofs Without Words" creado por Steve Phelps, contiene 30 demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras en formato de Hojas Dinámicas.

http://www.geogebra.org/m/1988309

En el Libro GeoGebra "Puzzles Pitagóricos", creado por Matías Arce, contiene applets con varios de los puzzles pitagóricos más famosos de la historia.

https://www.geogebra.org/m/BnPMKV3z

El Libro de GeoGebra "Teorema de Pitágoras", creado por Vicente Martín Torres, contiene 30 applets que tratan sobre demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras.