ESTUDIO 2

Aproximación al concepto de ángulo a través de redes asociativas Pathfinder en alumnos de educación primaria y segundaria obligatoria

Luis M. Casas García (*), Ricardo Luengo González (**)

** Colaborador del Dto. Didática de las CC Experimentales y de las Matemáticas. Director del Colegio Público de Guadajira (Badajoz)*
*** Dpto. Didáctica de las CC. Experimentales y de las Matemáticas.*

Resumen

En este artículo presentamos un estudio introductorio sobre el concepto de ángulo en alumnos de Primaria y Secundaria Obligatoria.

La dificultad de este concepto radica en las varias concepciones parciales que el alumno tiene que integrar en una sola mediante aproximaciones sucesivas a lo largo de su escolaridad.

Nuestro estudio presenta una descripción de la forma en que el alumno relaciona estas concepciones parciales, utilizando para ello la técnica de las Redes Asociativas Pathfinder.

También se analiza la evolución de la complejidad de las relaciones entre conceptos en los distintos cursos, utilizando un Índice de Complejidad creado al efecto.

Como conclusión de los datos obtenidos observamos que los conceptos de los alumnos, al principio, se van asociando de forma cada más compleja, pero gradualmente, lo hacen en forma más simple, en torno a conceptos más inclusivos que conducen finalmente al concepto general de ángulo.

Palabras clave: Investigación, Geometría, Redes conceptuales, Redes Asociativas Pathfinder, E. Primaria, E.S.O.

Summary

In this article we present an exploratory study on the angle concept in Primary Education and ESO pupils.

The difficulty of this concept bases in the several partial conceptions that the pupil has to integrate in an only through successive approximations throughout their schooling.

Our study presents a description of the form in which the pupil relates these partial conceptions, using for this the technique of the Pathfinder Associative Networks.

It is also analyzed the evolution of the complexity of the relationships among concepts in the different courses, using a Complexity Index created to the effect.

As conclusion of the obtained data we observe that the concepts of the pupils, at the beginning, are gone associating in a way each most complex, but gradually, they make it in form simpler, in connection with widest concepts that drive finally to the general angle concept.

Keywords: Research, Geometry, Conceptual networks, Pathfinder asociative networks. Primary school, Secondary school.

1.- Introducción

El estudio del concepto de ángulo, como el de otros conceptos "elementales" es, en nuestra opinión, un tema que, a pesar de su aparente simplicidad, puede resultar muy interesante tanto para la investigación como para la enseñanza de las Matemáticas.

Efectivamente el concepto de ángulo está lleno de matices y dificultades; comprender cómo se origina, se interioriza y se relaciona con otros conceptos matemáticos no es tarea fácil y no se encuentran, al menos en nuestro ámbito, muchos trabajos de investigación que aborden este problema.

Creemos que su principal interés radica en que, siendo un concepto aparentemente tan simple, está en la base de muchos conocimientos posteriores en Geometría, y como la mayor parte de los conceptos "simples" resulta ser un concepto difícil de aprender y, por tanto, de enseñar.

En nuestra práctica educativa, con alumnos de Primaria, hemos encontrado que, efectivamente, este es un tema que se presta a numerosos errores, debidos en la mayoría de los casos, a una deficiente conceptualización. Errores relativamente frecuentes en estos alumnos son confundir medida del ángulo con medida de los lados que aparecen en su representación gráfica, no reconocer el ángulo recto cuando cambia de posición, no identificar el giro como ángulo, etc. Todos estos errores son posteriormente origen de las dificultades que los alumnos de Secundaria presentan cuando llegan al estudio de la trigonometría, donde es necesaria una comprensión profunda del tema.

Aún más llamativo llega a ser, como estamos detectando en un trabajo de investigación que, en estos momentos realizamos con alumnos de Universidad (incluso de la carrera de Matemáticas), que, a pesar de años de enseñanza sigan arraigados en ellos conceptos que son incompletos, y con numerosos errores e inconsistencias.

Cuando a los alumnos de 5º de Matemáticas o recién licenciados les pedimos que expresen su concepto de ángulo dicen lo mismo y expresan las mismas concepciones que los alumnos de enseñanza básica. Podríamos decir que toda una enseñanza obligatoria, un bachillerato y cinco años de estudios universitarios no han modificado en lo más mínimo sus concepciones más elementales en este campo.

Uno de los autores que se ha ocupado de este tema de investigación es el profesor Mitchelmore. Sus trabajos realizados en la Macquaire University, de Sydney, Australia, se centran en el estudio del concepto del ángulo y muestran la gran complejidad que este concepto encierra, de donde surgen las numerosas dificultades de los alumnos.

Según Mitchelmore (1.990) el concepto de ángulo no es único, como a primera vista puede parecer, sino que se construye en la mente del alumno mediante la integración de al menos tres concepciones parciales, cada una de las cuales tiene distintas representaciones físicas en el entorno. A estas representaciones recurrimos los profesores para buscar ejemplos con que transmitir el concepto.

Estas tres concepciones parciales serían:

1.- Ángulo considerado como rincón.

A esta representación corresponderían ejemplos del ángulo tales como la esquina de una habitación, el ángulo de un polígono, el ángulo que forman las dos caras de una cuña, etc.

2.- Ángulo considerado como par de rayos.

Estaríamos utilizando esta representación cuando al hablar de ángulos ponemos como ejemplos las agujas del reloj, los dedos de la mano, el rumbo de una embarcación, y otros similares.

3.- Ángulo considerado como giro.

Estaríamos hablando de ángulo como giro cuando utilizamos ejemplos tales como una aguja que gira en una esfera, la luz giratoria de un faro, o una puerta que se abre. También estamos utilizando este concepto al trabajar en lenguaje LOGO.

A estas tres concepciones parciales corresponderían también las distintas definiciones, ejemplos y aplicaciones que aparecen en los libros de texto:

1.- Ángulo como conjunto de puntos.

Corresponden a esta concepción las definiciones de ángulo construidas a partir del concepto de región angular que podemos encontrar en Roanes (1.973), en Severi (1.962), y en multitud de libros de texto de uso en nuestras aulas.

2.- Ángulo como par de rayos.

En esta línea están las definiciones de ángulo que se dan a partir de la idea de un haz de semirrectas. Podemos verlas de nuevo en libros como el anteriormente mencionado de Severi o en el de Puig Adam (1972).

En los libros de texto no son tan frecuentes este tipo de definiciones, pero curiosamente se recurre en ellos a multitud de ejercicios y ejemplos en los que la idea implícita es precisamente la de rayos que convergen.

3.- Ángulo como giro.

Este tipo de definiciones son menos frecuentes, pero corresponderían a las que se basan en la diferencia de posiciones de una recta que efectúa un giro tomando como centro un punto. Cuando se trabaja la Geometría con LOGO se utiliza ampliamente esta concepción del ángulo como giro, tal como podemos ver en Abelson (1.981) y Luengo (1.997) y es precisamente la que aparece en los libros de texto cuando los alumnos comienzan a estudiar trigonometría y se recurre a la circunferencia trigonométrica.

Estas concepciones parciales podemos, a su vez, agruparlas en dos más simples, que Magina y Hoyles (1991), definen como "estática" y "dinámica":

> *"Para la perspectiva estática; el ángulo es la porción de plano incluida dentro de dos semirrectas en el plano con un punto común. Para la perspectiva dinámica; el ángulo es la cantidad de rotación necesaria para llevar uno de los lados desde su propia posición hasta el otro lado sin salirse del plano que contiene a ambos lados."*

Esta "multiplicidad" del concepto de ángulo hace que, como decíamos anteriormente, sea difícil de comprender para el alumno, quien tiene que identificar a cuál de las concepciones nos estamos refiriendo cuando hablamos de lo que es un ángulo y formarse una imagen mental adecuada al caso.

Mitchelmore (1.998 b) plantea algunas otras cuestiones de interés, que son, sin duda fuente de dificultades para los alumnos:

> *"Si se está pensando en el ángulo como giro ¿cómo se puede interpretar un rincón como ángulo? Si se define ángulo como un par de rayos, ¿como se distingue entre los dos ángulos que se forman en el vértice? Si un ángulo se define como región ¿qué pasa con los ángulos mayores de 360 grados?".*

La conclusión de Mitchelmore es clara:

> *"El problema sólo se resuelve para los estudiantes cuando reconocen que en todas esas diferentes situaciones está implicado el mismo concepto."*

Como podemos ver, no estamos hablando de un concepto simple, sino que estamos hablando de un concepto "múltiple", y el alumno tiene que aprender no sólo a identificar y diferenciar tres concepciones parciales, sino, por último, a integrarlas en un único concepto. Un concepto que, además, no tiene una definición verbal clara y precisa.

El problema de investigación queda sugerido por Mitchelmore en el mismo texto anteriormente citado, donde además, apunta que, aparte de la suya propia, hay muy poca investigación sobre el tema:

> *"¿Cómo pueden los estudiantes de diferentes edades reconocer que el mismo concepto está implicado en situaciones que pueden parecer a primera vista muy diferentes? Ha habido muy poca investigación sobre este tema."*

Aunque a la hora de definir el problema está en la misma línea de Mitchelmore, un nuevo aspecto para la investigación es el que nos sugiere Vasco, C. (1.998)

> *"La idea de base es que los conceptos básicos, como el de ángulo o el de número fraccionario, en realidad no tienen ni pueden tener definición verbal precisa, sino que más bien forman una red conceptual, una maraña de nudos y cuerdas que se extiende en el cerebro de manera todavía no dilucidada."*

De acuerdo con Vasco queremos obtener datos acerca de esa red conceptual y llegar a poder representarla, para comprender cómo están anclados esos conceptos y qué relaciones ha establecido el alumno entre ellos. Conociendo estas redes podemos detectar los conceptos poco claros para el alumno, sus dificultades y su evolución, para ayudarle en su proceso de aprendizaje.

Compartimos la misma idea que, en forma metafórica, pero muy expresiva, plantea Vasco:

> *"La idea es identificar en los sistemas concretos y familiares para los niños y jovenes, aquellos núcleos prácticos y activos, táctiles y visuales, de los cuales pueda partirse para lograr la conceptualización. La hipótesis de trabajo es que esos núcleos, que llamo "islas", son múltiples y aislados, y que la tarea principal del maestro es apoyar al estudiante para irlos haciendo surgir cada vez más, como islotes volcánicos que van saliendo de las profundidades, y para irlos uniendo a través de viajes en barco en un primer momento, luego a través de la construcción de puentes, y tal vez al final a través de autopistas y viaductos que lleguen hasta hacer olvidar a quien se mueve con confianza por todo el archipiélago, que debajo de esas autopistas y viaductos hay una multitud de islas e islotes que antes estaban separados."*

En el presente trabajo abordamos un estudio exploratorio sobre las relaciones que existen entre los distintos conceptos implicados y cómo se relacionan en la mente del alumno, así como su evolución a través de la escolaridad.

Tal como apuntaba Vasco en la cita que anteriormente reseñábamos, la manera en que se establece la red conceptual "todavía no está dilucidada". Nuestra investigación intenta "dilucidar" algunos aspectos de este complicado tema, ayudar a conocer cuáles son los puentes conceptuales que pueden ayudar al alumno a construir su conocimiento.

Para ello utilizaremos como técnica las Redes Asociativas Pathfinder que, como mostrábamos en un trabajo anterior (véase Casas y Luengo, 1.999) son, en nuestra opinión, un excelente instrumento de aproximación empírica al conocimiento de las estructuras conceptuales del alumno.

Este tipo de redes se desarrollan a partir de la década de los 90 en la Universidad de Nuevo México por Schvaneveldt (1.990) y colaboradores, como un intento de obtener un método empírico de representar el conocimiento humano. Basadas en la teoría matemática de grafos, tienen ciertas similitudes con los procedimientos de análisis de cluster, y permiten crear representaciones en forma de redes de la estructura cognitiva de un sujeto. Funcionan a partir de datos empíricos, de forma totalmente automática, evitándose así los inconvenientes de subjetividad e influencia externa que otras representaciones, como los mapas conceptuales, tienen.

Muy brevemente, podemos decir que, para construir las Redes Asociativas Pathfinder, se pide a los sujetos que evalúen cuál es la proximidad entre dos conceptos, tal como él los considere. A partir de los datos obtenidos, el algoritmo Pathfinder proporciona una representación gráfica en forma de redes en la que aparecen relacionados los conceptos de los que estemos tratando.

Utilizando estas Redes Asociativas, se puede estudiar la estructura de relaciones entre los conceptos en la mente de un sujeto, la similaridad con la estructura cognitiva de otros, y múltiples aspectos de interés.

En nuestro artículo anteriormente referenciado, presentábamos una experiencia de conocimiento de la estructura cognitiva relacionada con la resolución de problemas, en la que mostrábamos las posibilidades del las Redes Asociativas Pathfinder.

En el mismo describíamos también, de forma pormenorizada la fundamentación y el uso de estas Redes Asociativas. Aunque a lo largo del presente artículo haremos una descripción de las técnicas empleadas, para un conocimiento más detallado remitimos al lector a dicho trabajo.

2.- Estudio Exploratorio

2.1.- *El Problema planteado*

Tal como apuntamos en la introducción de este artículo, consideramos de gran interés llegar a conocer las estructuras cognitivas del alumno en un tema que, como el del ángulo, es de gran complejidad, y acerca del que no existe suficiente investigación.

El problema que nos planteamos es acercarnos a la forma en que asocia en su mente los conceptos el alumno y en qué forma la complejidad de las asociaciones va evolucionando conforme avanza la escolaridad.

Para acercarnos a la resolución de este problema necesitaremos un istrumento que que nos permiten obtener una representación de las asociaciones entre conceptos tal como el alumno las percibe, con la mínima interferencia posible por parte del profesor.

Una vez que las hayamos obtenidos, deberemos utilizar algún criterio que, de forma objetiva nos permita evaluar su complejidad para, de este modo, obtener datos acerca de la evolución que van teniendo a lo largo del tiempo.

2.2.- *Diseño y Metodología*

La experiencia aquí descrita se llevó a cabo en dos Centros de Enseñanza: el Colegio Público "San José", de Guadajira (Badajoz) y el Colegio Público "Juventud" de Badajoz.

Por lo que se refiere al primero, se trata de un pequeño centro rural de 5 unidades, en el que los alumnos estudian hasta 6º curso de Educación Primaria. Participaron 16 alumnos correspondiente a los cursos 3º (6 alumnos con una media de edad de 9 años) y 4º (10 alumnos con una media de edad de 10 años).

En cuanto al segundo, se trata de un centro urbano, con 24 unidades. En este centro participaron 36 alumnos de los cursos 5º (20 alumnos con una media de edad de 11 años) y 1º de la ESO (16 alumnos con una media de edad de 13 años).

En ambos casos se contó con la colaboración de los profesores de dichos cursos.

La experiencia se llevó a cabo durante los meses de Febrero y Marzo del presente curso escolar.

Como instrumento se utilizaron, como hemos explicado anteriormente, las Redes Asociativas Pathfinder. Existen varios algoritmos implementados en ordenador que permiten desarrollar estas redes, de forma automática y utilizamos para ello el programa informático KNOT-Mac (Knowledge Network Organizing Tool para Macintosh).

Dicho programa, desarrollado en la Universidad de Nuevo México por Schvaneveldt y cols. funciona en cualquier ordenador con entorno Macintosh. Permite representar Redes Pathfinder con mayor o menor complejidad, variando para ellos dos parámetros, "q" y "r" que hacen resaltar dentro de la Red Pathfinder solamente aquellos enlaces entre conceptos que son más significativos.

El programa permite también el cálculo de dos indicadores que son de gran utilidad:

- Similaridad: asigna un valor numérico entre 0 y 1 a la similaridad entre distintas redes, lo que permite la comparación entre las de los alumnos, entre éstas y las de los profesores, o bien entre ambas y una red "ideal".
- Coherencia: asigna un valor entre +1 y -1 a cada red y es un indicador tanto del nivel de conocimiento que tiene el alumno del campo conceptual que se esté trabajando, como de la adecuada realización de la tarea de asignación de valores de proximidad a los conceptos. Para un mayor detalle, véase Casas y Luengo, 1.999.

Para obtener nuestros datos a partir de la aplicación del programa Knot necesitábamos: por una parte, seleccionar los conceptos "claves" que queríamos representar relacionados con el concepto de ángulo mediante las redes Pathfinder, y por otra parte debíamos estudiar cuidadosamente los valores de proximidad de los mismos. Describiremos a continuación ambos aspectos de nuestro trabajo.

2.2.1.- *Selección de los conceptos a utilizar*

En primer lugar, se procedió a seleccionar cuáles son los principales conceptos que se manejan cuando se está enseñando el concepto de ángulo. Para ello, hemos utilizado dos métodos: la entrevista al profesor y el análisis de los libros de texto.

a) *Entrevistas al profesor:*

Se entrevistó a la profesora que impartía los cursos 3º y 4º de Primaria. La razón de la elección de este curso es debida a que es en ellos donde se inicia, por primera vez durante la escolaridad, el aprendizaje de este concepto.

Primeramente, se realizó una entrevista no dirigida en la cual se plantearon cuestiones generales sobre la enseñanza del concepto de ángulo. La entrevista estuvo centrada en la forma en la cual se inicia por primera vez su abordaje, y cuáles eran los recursos que se utilizaban.

En síntesis, y a partir de la información suministrada por la profesora, los conceptos que ella asociaba al de ángulo y usaba para explicarlo eran principalmente dos: cruce y abertura.

La secuencia de enseñanza que seguía era partir de dos rectas que se cortaban, y que formaban regiones, que resaltaba dibujando un arco en la intersección de las líneas. Los ejercicios que realizaban los alumnos estarían encaminados a destacar la existencia de estas regiones coloreándolas, señalándolas, recortándolas o bien por otros medios.

En una siguiente etapa, continuaba usando el concepto de ángulo, pero incluido en el de polígono, cuando trabajaba este concepto, de modo que el ángulo era una propiedad de una figura, en realidad la esquina de un polígono.

La magnitud de los ángulos se trabajaba partiendo del ángulo recto y, a partir de él, los ángulos con más o menos abertura. Partiendo del ángulo recto, se trabajaban el llano, el agudo y el obtuso. Los ejemplos que más frecuentemente se utilizaba eran la abertura de un compás, el giro de una puerta y, sobre todo, el de las agujas de un reloj. En todos estos casos podemos ver que se trataba de ejemplos de la vida diaria y que el alumno asociaba con algo que se movía e iba cambiando.

Con respecto a las dificultades que encontraba en el aprendizaje del concepto, la principal era que los alumnos consideraban el trabajo con ángulos como trabajo de "dibujo", sin un contenido matemático claro. Quizá fuera debido a que en esos cursos se trabaja con la medida del ángulo, que tiene expresión numérica y por tanto está más cerca de lo que entienden como "matemáticas".

Otra dificultad que resaltaba es que en los alumnos no identifican el concepto de ángulo con los de dirección o inclinación, sino tan sólo con una figura dibujada.

En una segunda entrevista en la que se plantearon los distintos abordajes que del tema se hacían, sobre todo a partir del libro de texto de los alumnos. Se analizaron, junto con la profesora cuáles eran los puntos clave de la exposición, cuáles eran aquellos en que más se insistía, cuáles eran los ejemplos y cuáles los ejercicios de aplicación que se utilizaban. Por el contrario, también se analizaron junto con la profesora cuáles eran los aspectos que, por ser considerados menos interesantes o menos adecuados, para los alumnos, se soslayaban.

En esta entrevista, se pudo observar que la profesora utilizaba frecuentemente recursos que no utilizaba el libro de texto, tales como los ejemplos de la vida diaria. También se observó que se daba más importancia en la enseñanza a los ejemplos y ejercicios del libro de texto que a las definiciones y en general textos expositivos.

b) ***Análisis de los libros de texto empleados.***

Se procedió al análisis de los libros de texto de los cursos 3º y 4º. Para ello se comenzó seleccionando los conceptos más significativos, con el criterio de ser aquellos en los que:

- aparecían resaltados en los textos expositivos (subrayados, coloreados,...)
- eran repetidos con mayor frecuencia en dichos textos.
- aparecían en los ejemplos y ejercicios con mayor frecuencia.

Se procedió a elegir una primera lista de conceptos que, posteriormente, se utilizarían para elaborar la red asociativa Pathfinder. En un principio se obtuvieron, por este procedimiento 18 conceptos.

Tras esta primera selección, se procedió a una segunda selección de los conceptos seleccionados.

Para este segundo "filtro", se utilizaron dos criterios:

1.- En primer lugar, un criterio de orden práctico relacionado con el programa Knot y con su utilización por parte de los alumnos. A la hora de utilización de este programa, el tiempo que el alumno emplea es determinante, pues hay un límite máximo de tiempo en que puede mantener atención, antes de perder interés por la tarea que está realizando. Este aspecto es crucial en alumnos como los de Primaria con los que realizamos esta experiencia.

Así pues, por nuestro conocimiento anterior en la utilización de este programa, determinamos que el número máximo de conceptos debería estar entre 10 y 12.

2.- Un segundo criterio lo obtuvimos a partir de la literatura científica relacionada con el tema. En esta literatura, tal como anticipábamos en la introducción de este artículo, los conceptos relacionados con los ángulos aparecen agrupados de acuerdo con dos tipos de representaciones, que podemos denominar "dinámica" y "estática", del ángulo.

De acuerdo con los criterios enunciados, seleccionamos 11 conceptos asociados al de ángulo agrupados de la forma que sigue:

- Concepción "estática" de ángulo.

  Rincón, región angular, lados de un ángulo, rectas secantes.

- Concepción "dinámica"

  Orientación, giro, dirección, agujas del reloj.

- Conceptos que participan de las dos concepciones.

  Ángulo, abertura, inclinación

2.2.2.- Asignación de los valores de proximidad

La asignación de los valores de proximidad y el posterior cálculo de las redes asociativas Pathfinder se lleva a cabo de forma automática, como hemos indicado anteriormente, mediante el programa informático Knot. El algoritmo Pathfinder, tal como también hemos dicho, permite presentar varios tipos de representaciones más o menos complejas, según se varíen dos parámetros q y r.

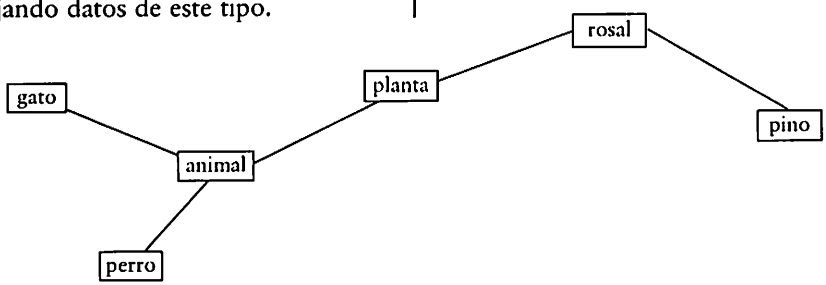
Para esta experiencia establecimos en todos los casos los mismos parámetros: q= 10, r= infinito. La elección del valor de q se debe a que, al ser 11 el número de conceptos que manejamos, con q=10 se obtiene la red menos compleja posible, resaltándose sólo los enlaces más significativos entre conceptos. Por lo que respecta a r, la elección es debida a que los valores que asignan los alumnos a la proximidad de conceptos está medida en una escala ordinal, y dada la forma de construcción de las Redes Asociativas Pathfinder, este valor es el más adecuado cuando estamos manejando datos de este tipo.

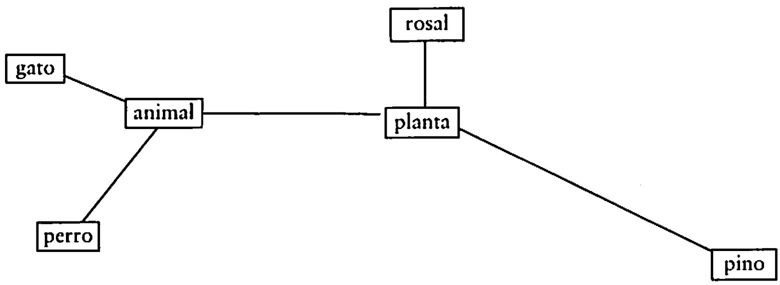
Paso previo a la asignación de valores de proximidad a los conceptos seleccionados fue efectuar una pequeña prueba piloto, cuyo objetivo fue determinar si con los alumnos entre 9 y 11 años era posible utilizar el programa Knot, pues teníamos algunas dudas de si los alumnos tenían capacidad de manejar dicho programa.

La prueba piloto se hizo con 6 conceptos pertenecientes a un campo de conocimiento con el que suponíamos que cualquier niño de tales edades estaría familiarizado: perro, gato, animal, planta, rosal, pino.

Los alumnos realizaron esta prueba piloto en un ordenador Macintosh, del que se disponía en la clase, y fueron accediendo por turnos a lo largo de dos días.

Se obtuvieron Redes Asociativas del tipo de las siguientes:





Una vez establecidas todas las redes asociativas de los alumnos, se calculó el valor de la coherencia de dichas redes y la media de todos los valores.

Se descartó para la experiencia definitiva a aquellos alumnos que, o bien habían obtenido coherencias negativas o bien su valor estaba una desviación típica por debajo de la media.

En ambos casos la causa de la exclusión de los alumnos era que, o bien no habían comprendido la mecánica del trabajo con el programa Knot, o bien no habían realizado la tarea con suficiente atención.

El último paso fue la realización de la prueba definitiva, que se llevó a cabo, como en el caso de la prueba piloto, en un ordenador Macintosh al que accedían durante la jornada escolar, a lo largo de dos días. El tiempo medio empleado por los alumnos en realizar la prueba fue de 20 minutos.

Las instrucciones que se les facilitaron fueron para todos las mismas y en los mismos términos. Se les indicó que iban a aparecer una serie de palabras que tenían algo que ver unas con otras, que tenían cierta relación, poca, mucha o regular y que ellos tenían que indicar cuánta.

Nuevamente en esta fase se descartó a los alumnos cuyas Redes presentaban un valor de la coherencia negativo o una desviación típica por debajo de la media. Los alumnos de los que, definitivamente, se tomaron los datos de este estudio, fueron:

3º Curso: 4 alumnos.
4º Curso: 8 alumnos.
5º Curso: 13 alumnos.
1º ESO: 10 alumnos.

2.3.- *Resultados*

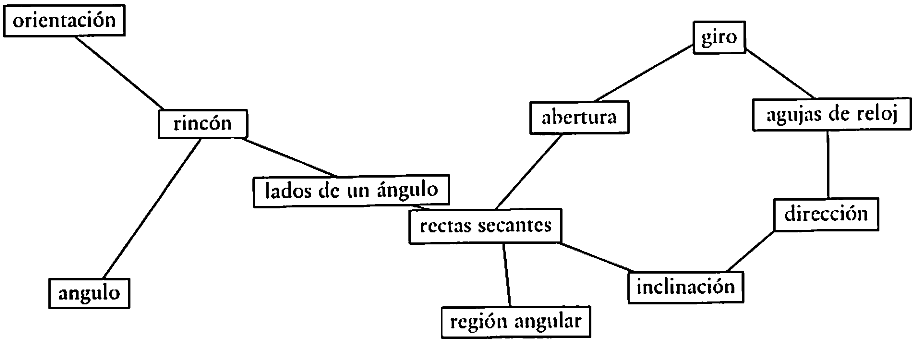
En las Redes Asociativas podemos observar en una primera inspección dos aspectos que, a nuestro juicio son muy interesantes: su forma de estructuración y su nivel de complejidad. Pasaremos a comentar dichos aspectos.

2.3.1.- *Estructura jerárquica de las redes.*

En primer lugar, podemos observar que las representaciones obtenidas no indican una estructura claramente jerárquica. Esto va en la línea expresada, entre otros, por Bajo, M.T. y Cañas, J.J. (1.994), quienes indican que el conocimiento no está necesariamente ordenado de forma jerárquica.

Este tipo de estructura jerárquica fue muy utilizada en las primeras teorías de representación... y aunque un gran número de experimentos han mostrado las debilidades de estos modelos... algunas de las técnicas de análisis de los datos de proximidad todavía ofrecen este tipo de representación. Es importante señalar, sin embargo, que aunque la mayoría de las teorías de este tipo son estrictamente jerárquicas, ya que un concepto determinado sólo puede estar conectado a un solo concepto de un nivel más alto de la jerarquía, existen modelos y técnicas asociados a los mismos que, aunque mantienen relaciones jerárquicas, no lo hacen en sentido estricto ya que permiten solapamiento entre las distintas clases o categorías de forma que un concepto puede estar conectado a más de un concepto representado a un nivel más alto de la jerarquía.

Observemos, por ejemplo la Red correspondiente a uno de los alumnos, en la que podemos ver reflejada esta afirmación. Junto con las siguientes que presentaremos en este trabajo, nos permiten hacernos una idea de este aspecto.



Efectivamente, las relaciones entre los conceptos, tal como aparecen en esta y otras representaciones que obtenemos en nuestro estudio y que iremos mostrando, no aparecen en forma claramente jerárquica, con unos conceptos "superiores" de los cuales dependan otros, sino que la persona que aprende va construyendo redes que enlazan conocimientos nuevos con otros anteriores, solapándose en determinados momentos distintas categorías de conceptos, y haciéndolo en torno a ciertos conceptos clave.

Sobre este aspecto, que juzgamos muy interesante, incidiremos más en detalle en el siguiente apartado.

Baste ahora con añadir, y esto nos parece también de gran interés, que esta primera aproximación nos indica que existen temas dentro del campo de conocimiento de las matemáticas, que aparecen como más claramente estructurados que otros. En este sentido, volvemos a hacer referencia a nuestro anterior trabajo sobre los conceptos relacionados con los problemas de suma y resta (Casas y Luengo, 1.999) en que podíamos observar una más clara estructuración de dichos conceptos en contraposición con lo que obtenemos ahora.

Podemos suponer, entonces, que hay tópicos dentro de la enseñanza de las matemáticas que merecen un abordaje más estructurado que otro, puesto que, por su propia naturaleza y por la forma en que se organiza la estructura cognitiva del alumno son diferentes.

2.3.2.- *Complejidad de las redes*

La segunda propiedad que podemos observar en las redes obtenidas es su diferente nivel de complejidad. Efectivamente, a simple vista, podemos observar que las redes de los alumnos son más complejas unas que otras. El problema para identificar la complejidad de las redes, que aparece a simple vista es cuantificarla de algún modo.

Si aplicamos las recomendaciones de Novak, para evaluar los mapas conceptuales (recomendaciones que parecen ampliamente aceptadas, aunque el propio Novak propone a los profesores crear otros indicadores), habría que evaluar:

- Las relaciones.

En este caso, vienen indicadas por los enlaces entre los nodos de la red. Dado que las redes son grafos, en el sentido matemático del término, se puede representar en forma numérica por la densidad del grafo, definido como el número de enlaces totales partido por el de enlaces posibles, donde éste último valor se calcula mediante la fórmula n x (n-1) siendo n el número de nodos. En el caso de que los enlaces fueran unidireccionales, la fórmula sería n x (n-1) / 2.

- **Las jerarquías**

La representación de las jerarquías en este caso serían los nodos que llamaremos "múltiples", entendiendo por tales aquellas con tres o más enlaces. Tendríamos pues, en cuenta, para evaluar este aspecto, el número de este tipo de nodos en cada red. Pero además habría que considerar la fuerza de relación con los demás nodos, que vendría indicada por el grado de los nodos múltiples, entendiendo por grado el número de enlaces que tiene cada nodo.

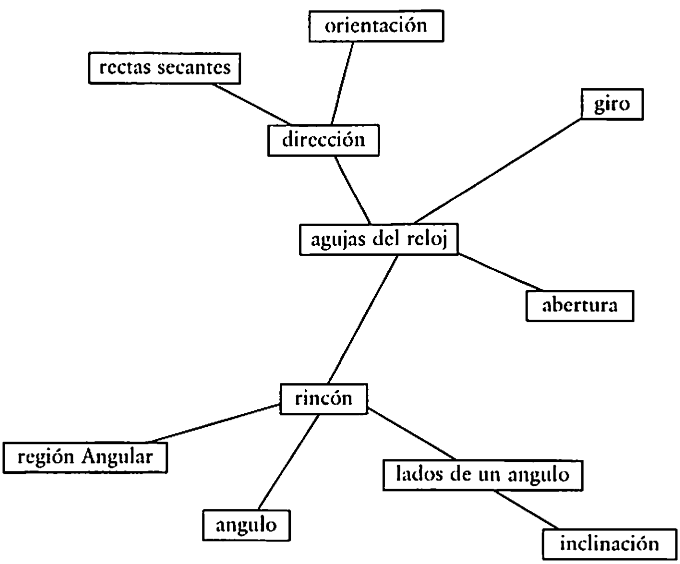
- **Los enlaces cruzados.**

En realidad ese aspecto también es, de nuevo, medido por la densidad del grafo, dado que, a mayor número de enlaces, hay más enlaces cruzados entre nodos. La razón es que, al aumentar los enlaces, dado que en este tipo de representaciones todos los nodos están enlazados tienen que aparecer otros enlaces por caminos indirectos, en definitiva, enlaces cruzados.

Basándonos en estos criterios, hemos creado un Índice de Complejidad de Redes que combinaría estos tres aspectos. Su valor se calcularía:

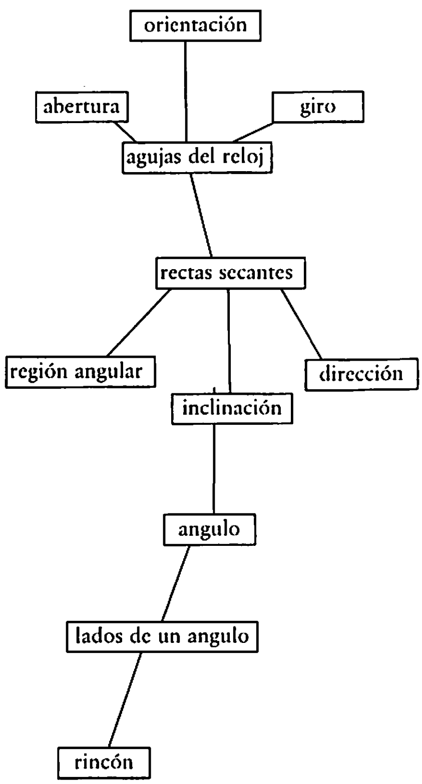
Índice de complejidad = Densidad del grafo x nº de nodos múltiples x suma de los grados de los nodos múltiples

Veamos cómo se calcularía el Índice de Complejidad de la siguiente red:

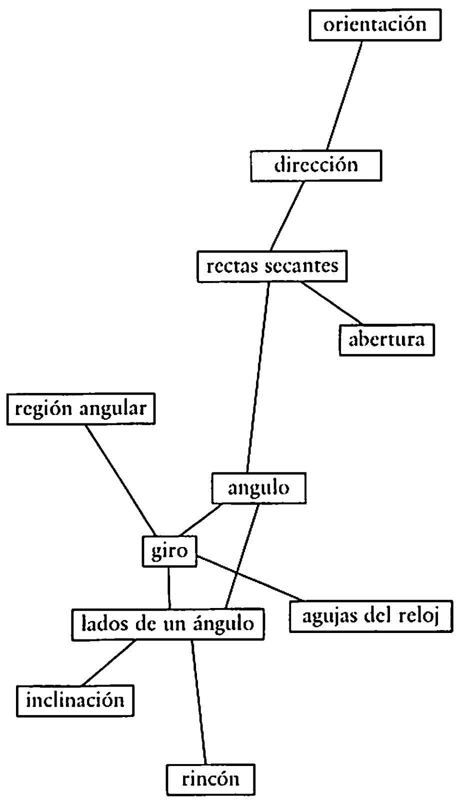


- La densidad del grafo sería 0.18, que corresponde al resultado de dividir el número de enlaces presentes (20) entre el número máximo de enlaces posibles (en este caso, 110). El número de enlaces presentes es de 20, y no 10 como puede parecer, pues al ser bidireccionales, debemos contar dos en cada uno de los que se representan gráficamente. Este mismo número corresponde a la suma de los grados de todos los nodos.
- El número de nodos múltiples sería 3: "dirección", "agujas del reloj" y "rincón".
- La suma de los grados de los nodos múltiples sería 11 (3 + 4 + 4).
- Multiplicando estos tres factores, obtenemos un Índice de Complejidad de 5.94 (0,18 x 3 x 11).

De modo análogo se calcularía el Índice de las demás Redes. Como ejemplo, veamos algunas de las Redes obtenidas y sus Índices de Complejidad:



Índice: 0,18 x 2 x 8 = 2,9



Índice: 0,2 x 4 x 14 = 11,2

Si calculamos, atendiendo a este índice, la complejidad de las representaciones de todos los alumnos, obtendremos como media los siguientes resultados:

Índice alumnos 3º: 2,11
Índice alumnos 4º: 6,03
Índice alumnos 5º: 4,62
Índice alumnos ESO: 3,86

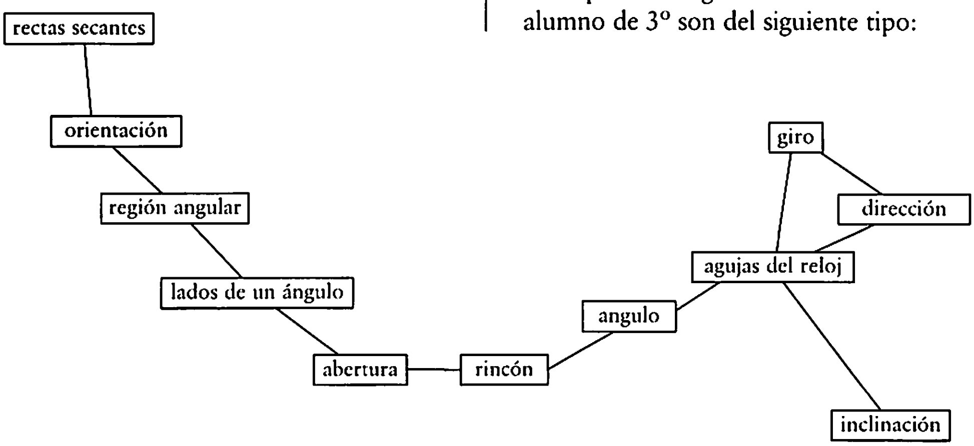
Estos resultados nos indican que la complejidad de las Redes Asociativas de los alumnos, correspondientes a sus estructuras cognitivas del concepto de ángulo va cambiando conforme van avanzando en la escolaridad.

Estos datos coinciden, con la concepción del aprendizaje humano como un proceso que supone una mayor complejidad y estructuración de los conocimientos anteriores. Pero podemos observar que, contrariamente a lo que sería esperable, la complejidad de las redes no va aumentando de forma continua, sino que, por el contrario, tiene un máximo a partir del cual va gradualmente disminuyendo.

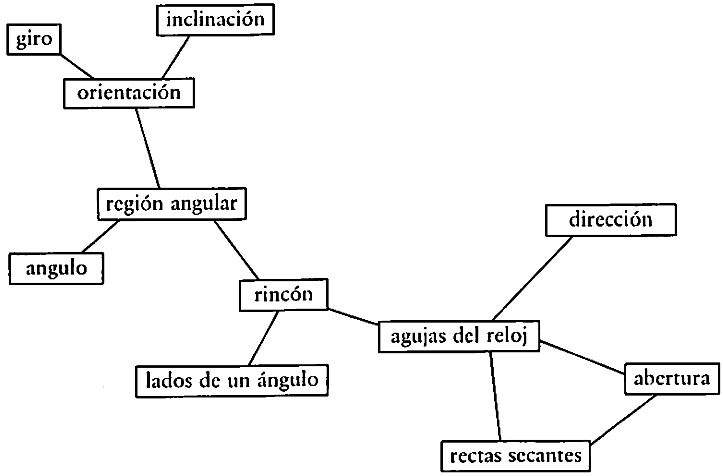
En efecto, podemos constatar que:

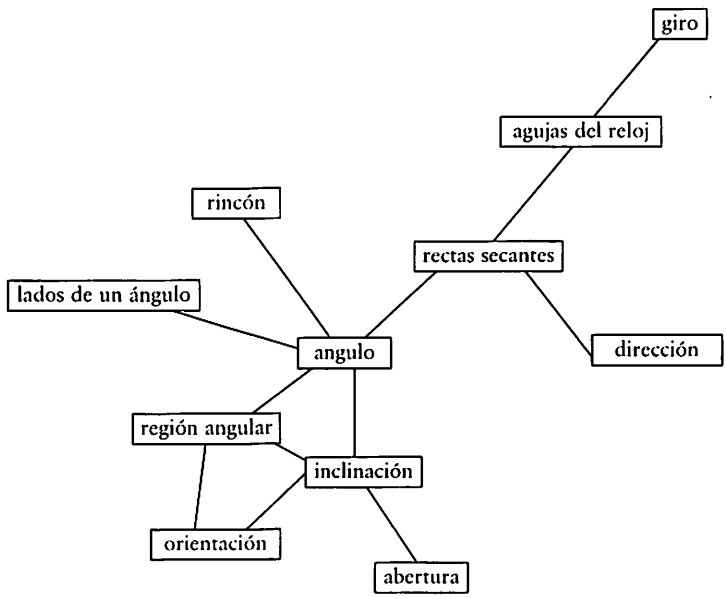
- En 3º las redes son muy simples.
- En 4º son más complejas.
- En 5º baja su complejidad.
- En los alumnos de ESO son aún menos complejas.

Nuestra interpretación de estos datos es que, para los alumnos de 3º curso los conceptos están muy poco organizados, y guardan poca relación unos con otros. Esto es lógico, pues es el curso donde sólo han ido empezando a estudiar el concepto de ángulo. Las Redes de los alumno de 3º son del siguiente tipo:

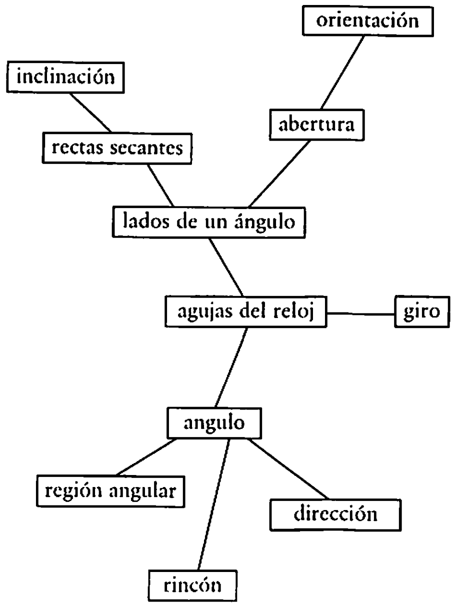


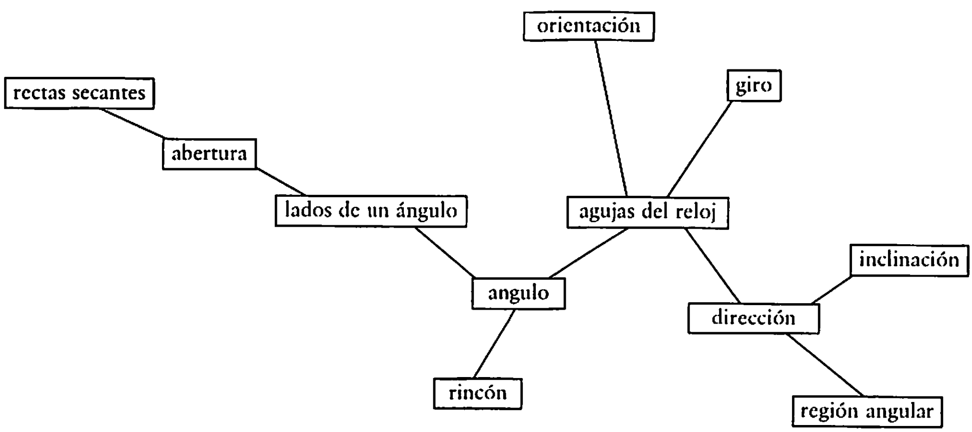
A partir de 4º empiezan a crearse más enlaces entre estos conceptos, aunque todavía están bastante desorganizados. Aumenta pues la complejidad media de las redes de los alumnos. Las que mostramos a continuación son de este tipo:



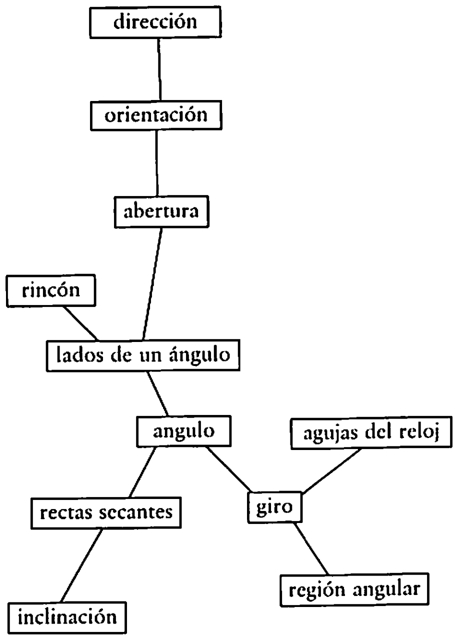


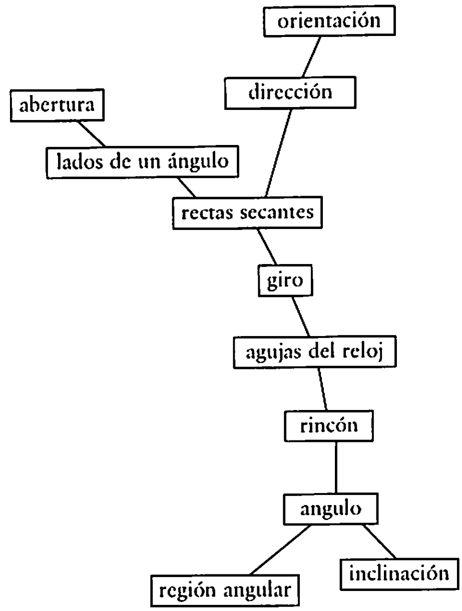
Pero a partir de 5° parece que los conceptos se van organizando y las redes cognitivas, en lugar de hacerse más complejas, tienden a simplificarse, nucleándose en torno a cada vez menos conceptos, relacionados todos con uno o dos de ellos. Estos conceptos serían los puntos clave a los que el alumno "ancla" su estructura cognitiva. Aparecen varias redes del tipo que mostramos, y que ilustran nuestra afirmación:





Definitivamente es en la ESO, donde estos conceptos clave aparecen como mejor establecidos y se van nucleando precisamente en torno a las dos concepciones "estática" y "dinámica" del concepto de ángulo. Aparece también en estas representaciones el concepto de ángulo como concepto central al que el alumno va "anclando" otros conceptos más concretos.





El siguiente paso, si se confirmara esta evolución sería que todos los conceptos se estructurarían en torno a uno sólo, precisamente el concepto de "ángulo". Nuestras primeras investigaciones con redes cognitivas de adultos, parecen confirmarlo.

Esta evolución de la complejidad de las redes cognitivas de los alumnos a lo largo de la escolaridad, corresponde plenamente con lo propuesto por Mitchelmore y que ya señalábamos en una cita anterior, en relación con que el alumno va descubriendo que el mismo concepto, precisamente el de ángulo está implicado en diferentes contextos a primera vista diferentes.

Nuestros resultados creemos que confirman esta afirmación y ponen de manifiesto de forma gráfica lo que, como el mismo autor afirmaba, hasta ahora no estaba suficientemente investigado.

3.- Conclusiones y prospectiva

Este estudio exploratorio nos permite establecer unas hipótesis razonables que creemos pueden ser de gran interés de cara a la investigación futura.

La técnica de las Redes Asociativas Pathfinder, junto con el uso del Índice de Complejidad de Redes que hemos propuesto, creemos que nos permite apoyar de forma experimental lo que diferentes autores, por otras vías, han avanzado como planteamientos teóricos. Nos permite también hacer una primera aproximación de tipo cuantitativo que puede completarse de forma muy eficaz con otras técnicas de corte más cualitativo.

Efectivamente, creemos estar en el camino de mostrar cómo a lo largo del proceso de desarrollo, las concepciones sobre el ángulo (y podemos suponer que en general muchas otras) que el alumno va adquiriendo se van interrelacionando de una forma cada vez más compleja, pero a la vez, y queremos destacar que este es un aspecto no suficientemente constatado por otros autores, se van estructurando en torno a un número menor de conceptos cada vez más amplios e inclusivos.

Como nuestras conclusiones nos permiten adelantar, el proceso de estructuración del conocimiento no implica sólamente un proceso de aumento en la complejidad de las redes cognitivas de los alumnos, sino que se produce un proceso, quizá aparentemente paradójico, de mayor simplificación, puesto que los conocimientos se van estructurando en torno a núcleos cada vez más fuertes alrededor de los cuales el alumno va "anclando" su estructura cognitiva.

Podemos resaltar también como conclusión de este trabajo el hecho de que, mediante la utilización de la técnica descrita, podamos constatar el diferente grado y forma de estructuración de los conocimientos en la mente de los alumnos de distintos tópicos dentro del campo de las matemáticas.

Comparando estos resultados con otros referidos a distintos tópicos de las Matemáticas podremos poner de manifiesto que la estructuración de los conocimientos es un proceso que se produce de forma diferente no sólo en los distintos alumnos de distintas edades, sino también en los varios tópicos de enseñanza.

Esto nos sugiere que, tanto el concepto de ángulo como seguramente muchos otros, necesitan una aproximación didáctica que contemple no sólo los niveles evolutivos del alumno en un momento determinado, sino que también tenga en cuenta cuáles son los puntos clave de la estructura cognitiva del alumno donde podemos actuar para ampliar y consolidar dicha estructura.

Este aspecto puede tener importantes repercusiones en la práctica educativa, pues, si con los instrumentos y técnicas que proponemos, logramos identificar cuáles son los puntos "de anclaje" de la estructura cognitiva del alumno en un determinado tema podemos ayudar al profesor para que sea precisamente en estos puntos donde centre su atención en la enseñanza.

Los resultados que aquí avanzamos permiten abrir, en nuestra opinión, interesantes caminos tanto en la investigación como en la práctica educativa.

Bibliografía

ABELSON H. Y DI SESSA, A. (1981) Turtle Geometry, The computer as a Medium for Exploring Mathematics. Ed. The MIT Press.

BAJO, M.T. Y CAÑAS, J.J. (1.994). Métodos indirectos de adquisición del conocimiento. En Adarraga, P. y Zaccagnini, J.L. (eds.), Psicología e Inteligencia Artificial. Trotta. Madrid

CASAS L. Y LUENGO, R. (1.999) La exploración de la estructura conceptual en los alummos. Un método empírico: las Redes Asociativas

Pathfinder. En "Campo Abierto" nº 16. Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. p. 11-33.

LUENGO, R. (1997): "Geometria Diferencial Logo. El ejemplo de los Poligonos Nazaries". Monográfico de la revista Epsilon Nº 38. (Pgs 81-100). Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". Sevilla.

MAGINA, S. Y HOYLES, C. (1991) Developing a map of children´s conceptions of angle. Proceedings Fifteenth PME Confernce.,p. 358-364.

MITCHELMORE, M. C. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. Mathematica Didactica, 13(2), 19-37.

MITCHELMORE, M. C., & WHITE, P. (1996). Children's concepts of turning: Dynamic or static? In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 415-421). Valencia, Spain: University of Valencia.

MITCHELMORE, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. Cognition and Instruction, 16, 265-284.

MITCHELMORE, M. C., & WHITE, P. (1998 b). Development of angle concepts: A framework for research. Mathematics Education Research Journal, 10(3), 4-27.

NOVAK, J Y GOWIN, D. (1988). Aprendiendo a aprender. Martínez Roca. Barcelona

PUIG, P. (1.972). Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos. Biblioteca Matemática, S.L. Madrid.

ROANES, E. (1973). Matemáticas para Profesores de E.G.B. Ed. Anaya. Salamanca.

SCHVANEVELDT, R.W. (ED.) (1990). Pathfinder Associative Networks. Studies in Knowledge Organization. Ablex. Norwood, N.J.

SEVERI, F. (1962). Elementos de Geometría. Ed. Labor. Barcelona.

VASCO, C. (1998) Memorias - III congreso Iberoamericano de Educacion Matemática. Caracas, 26 al 31 de Julio de 1998.